Ekstremum funkcji

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Ekstremum funkcji

Ilustracja przedstawia metalowy most w kształcie sinusoidy.
Źródło: Moritz Kindler, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Minimalizacja i maksymalizacja odgrywają istotną rolę w wielu gałęziach nauki i życia codziennego. Problem minimalizacji możemy spotkać już na poziomie atomowym, np. znajdując optymalna geometrię cząsteczki minimalizujemy jej energię potencjalną rozumianą jako funkcję położenia atomów. Istnieje wiele zaawansowanych algorytmów minimalizacji (maksymalizacji). Standardowe metody prowadzą nas do wyznaczenia ekstremum lokalnego funkcji opisującej dane zjawisko.

> **Twoje cele**
>
> - Dowiesz się co to jest ekstremum funkcji.
> - Nauczysz się klasyfikować ekstrema funkcji.

Przeczytaj

Definicja: Minimum lokalne

Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne równe $f(x_0)$, gdy można wskazać takie otoczenie punktu x_0, że dla każdego argumentu z tego otoczenia

$$f(x_0) \leqslant f(x)$$

Definicja: Maksimum lokalne

Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne równe $f(x_0)$, gdy można wskazać takie otoczenie punktu x_0, że dla każdego argumentu z tego otoczenia

$$f(x_0) \geqslant f(x)$$

Definicja: Maksimum (minimum) właściwe (niewłaściwe)

Jeśli istnieje takie otoczenie, w którym dla $x \neq x_0$ spełniona jest ostra nierówność $f(x_0) < f(x)$ lub $f(x) < f(x_0)$ to mówimy, że funkcja ma w punkcie x_0 maksimum (minimum) właściwe, w przeciwnym wypadku mówimy o maksimum (minimum) niewłaściwym.

Maksimum i minimum określamy terminem **ekstremum**. Ekstremum po łacinie oznacza **skrajne**.

Wniosek:

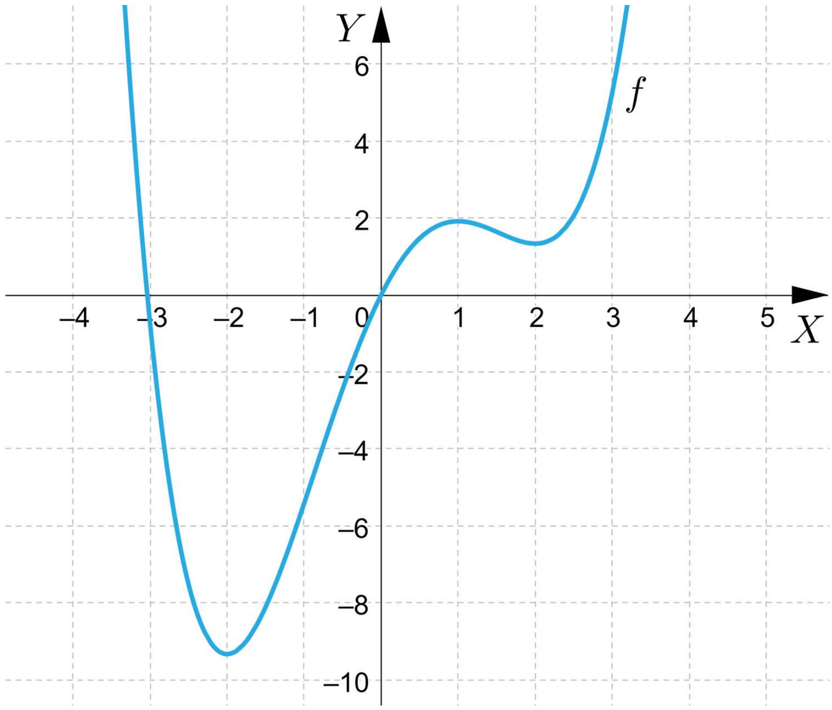
Funkcja posiada ekstremum lokalne w punkcie, w którym następuje zmiana jej monotoniczności.

Przykład 1

Narysujemy przykład wykresu takiej funkcji $f(x)$, która w punktach (-2) i 2 osiąga minimum lokalne, a w punkcie 1 ma maksimum lokalne, przy czym $f(2) > f(-2)$.

Rozwiązanie:

Przykładowe rozwiązanie przedstawia poniższy wykres.

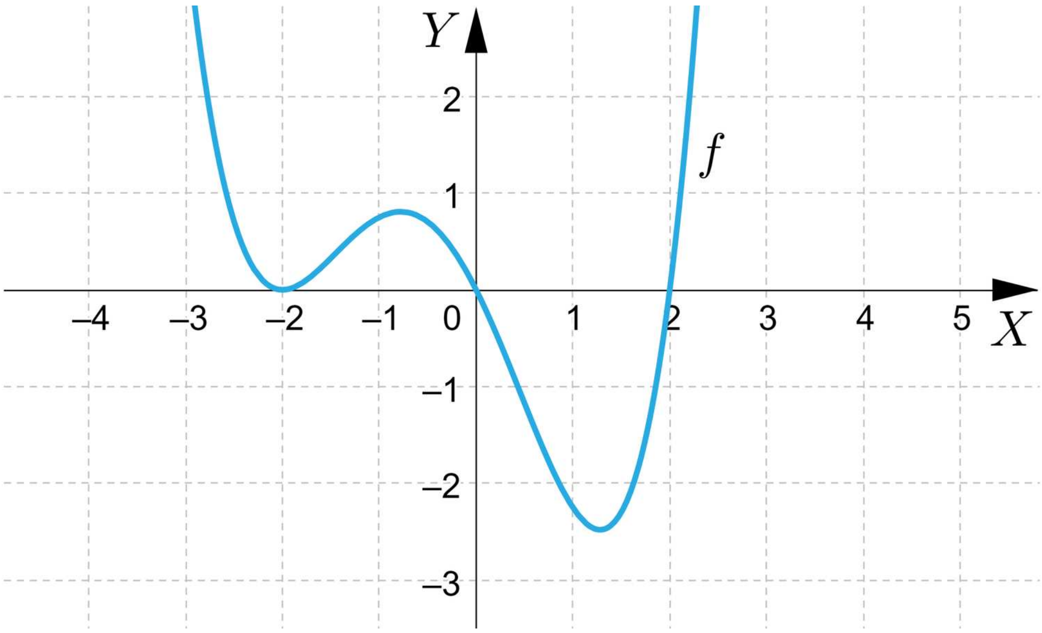


Przykład 2

Narysujemy przykład wykresu takiej funkcji $f(x)$, która w przedziałach $\langle -3, \ -1\rangle$ oraz $\langle 1, \ 3\rangle$ ma minima lokalne, w przedziale $\langle -2, \ 0\rangle$ ma maksimum lokalne, przy czym (-2), 0, 2 są miejscami zerowymi tej funkcji.

Rozwiązanie:

Przykładowe rozwiązanie przedstawia poniższy wykres.



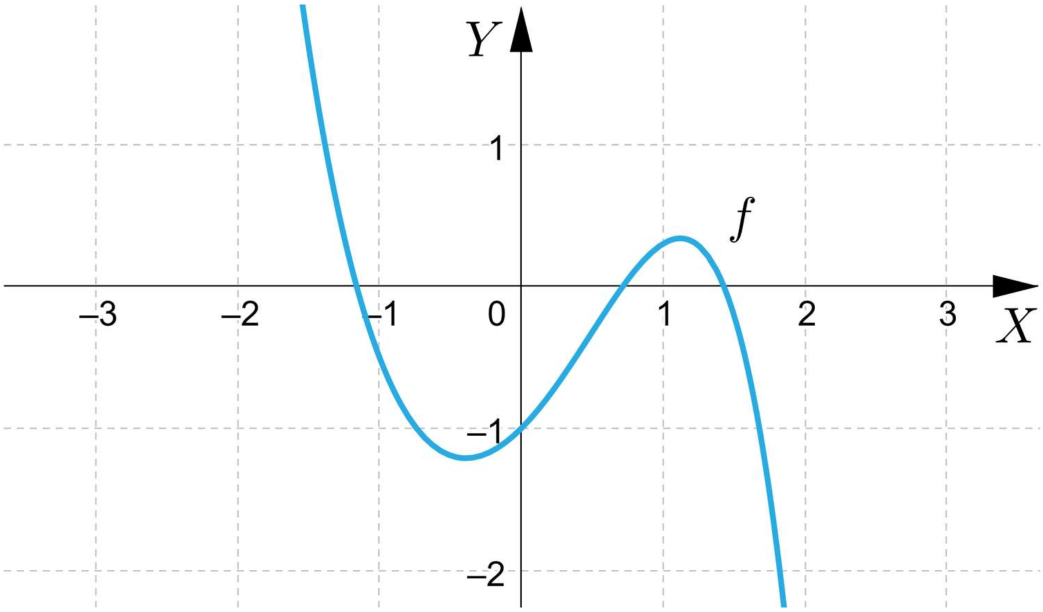
Przykład 3

Narysujemy przykład wykresu takiej funkcji $f(x)$, która posiada dwa (różnego typu) ekstrema lokalne oraz trzy miejsca zerowe, przy czym przecina oś Y w punkcie o rzędnej

(-1).

Rozwiązanie:

Przykładowe rozwiązanie przedstawia poniższy wykres.

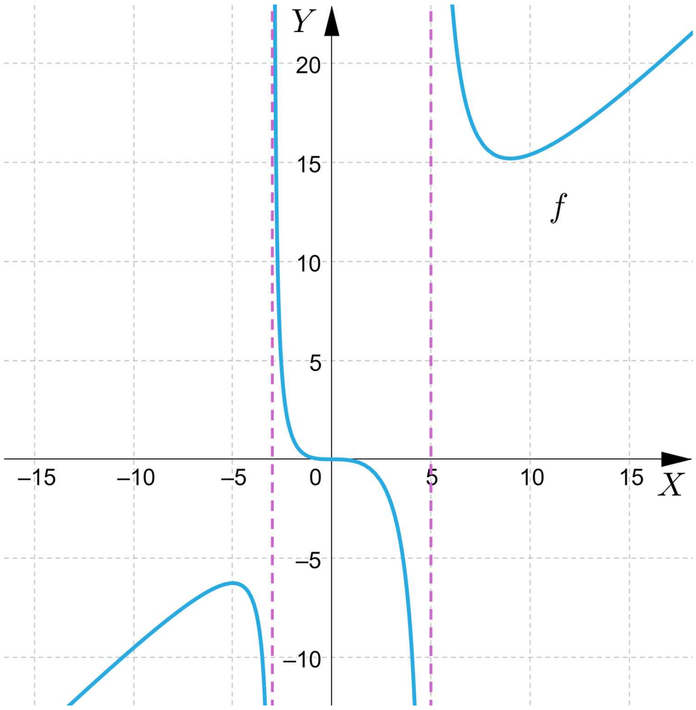


Przykład 4

O funkcji $f(x)$ wiadomo, że w każdym z przedziałów $(-\infty, \ -5)$ i $(9, \ \infty)$ jest rosnąca, a w przedziałach $(-5, \ -3)$, $(-3, \ 5)$, $(5, \ 9)$ jest malejąca. Naszkicujemy przykład wykresu tej funkcji i wskażemy odcięte punktów w których ma ekstrema.

Rozwiązanie:

Przykładowe rozwiązanie przedstawia poniższy wykres.



Uzasadnienie:

Funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, \ -5)$ i $(9, \ \infty)$ oraz malejąca w przedziałach $(-5, \ -3)$, $(-3, \ 5)$, $(5, \ 9)$. W punktach o odciętych (-5) i 9 następuje zmiana monotoniczności, zatem w tych punktach funkcja posiada ekstrema. Z wykresu funkcji wnioskujemy, że są to odpowiednio maksimum lokalne i minimum lokalne.

Przykład 5

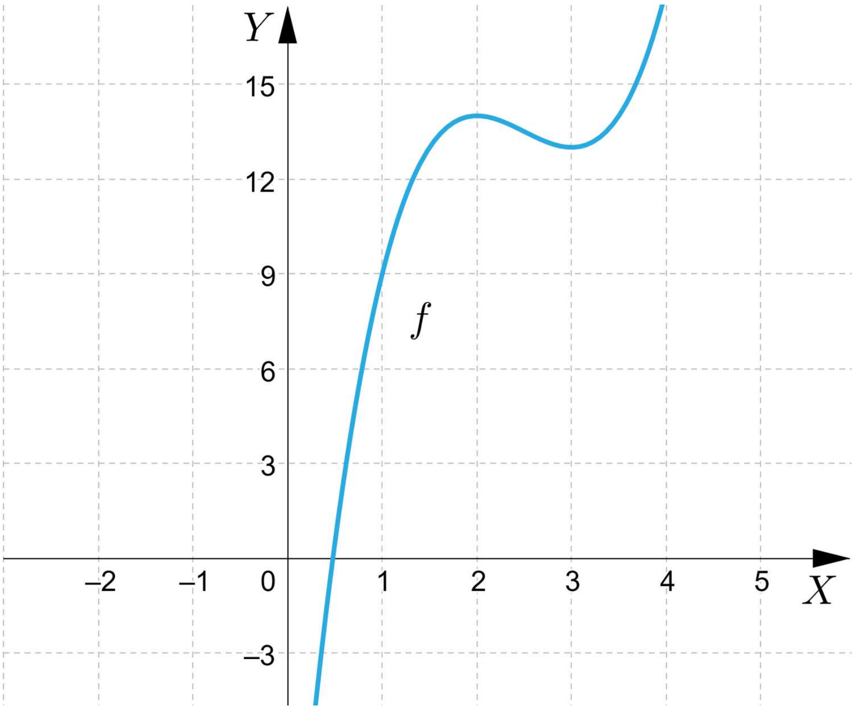
Korzystając z definicji uzasadnimy, że podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach:

a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$, w punkcie $x = 2$,

b) $f(x) = |x| + x$, w punkcie $x = 0$.

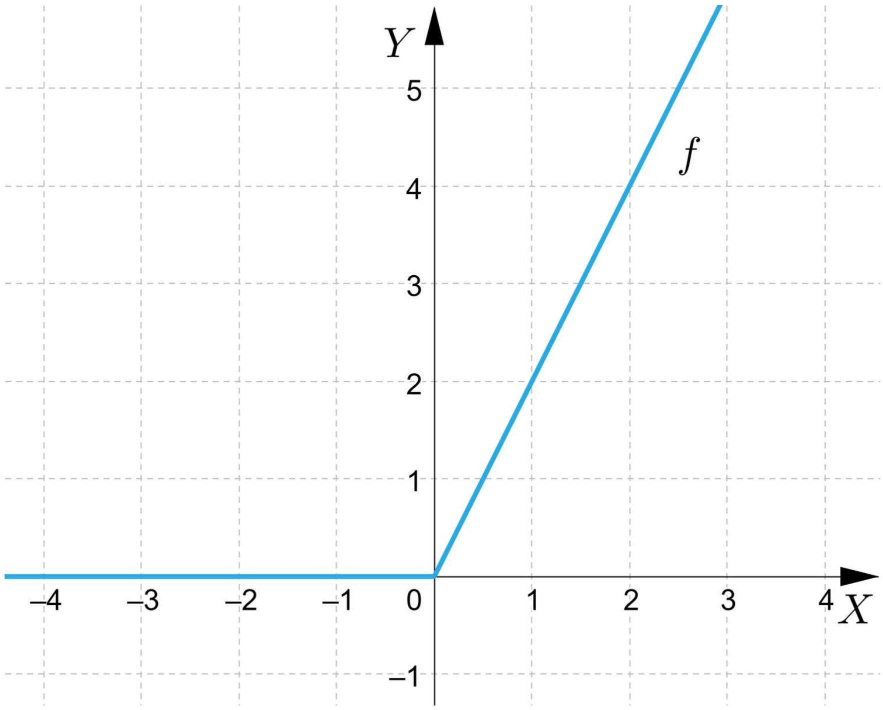
Rozwiązanie:

Ad a)



Zauważmy, że dla każdego $x \in (-\infty,\ 3)$ zachodzi $f(x) < f(2) = 14$, co oznacza, że funkcja ma w punkcie $x = 2$ maksimum lokalne właściwe równe 14.

Ad b)



Zauważmy, że dla każdego $x \geqslant 0$ mamy $f(x) = 2x$ oraz dla każdego $x < 0$ mamy $f(x) = 0$. Otrzymujemy zatem $f(x) \geqslant f(0) = 0$, co oznacza, że funkcja w punkcie $x = 0$ ma minimum lokalne równe 0.

Słownik

miejsce zerowe funkcji

taki argument x należący do dziedziny funkcji dla którego $f(x) = 0$

funkcja rosnąca

funkcja f jest rosnąca, jeżeli dla dwóch dowolnych argumentów x_1 oraz x_2 należących do dziedziny funkcji, takich, że $x_1 < x_2$, zachodzi warunek

$$f(x_1) < f(x_2)$$

funkcja malejąca

funkcja f jest malejąca, jeżeli dla dwóch dowolnych argumentów x_1 oraz x_2 należących do dziedziny funkcji, takich, że $x_1 < x_2$, zachodzi warunek

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj polecenia zamieszczone pod nią.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D11MLy0BZ

Polecenie 2

Polecenie 3

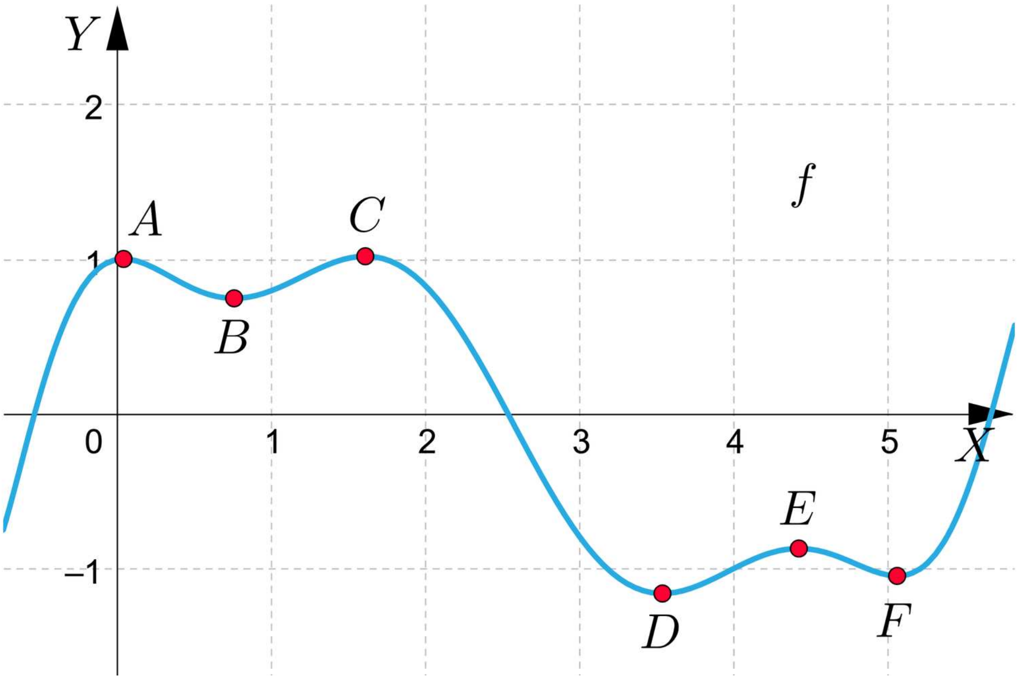
Korzystając z definicji pokażemy, że funkcja $f(x) = |x - 2|$ ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0 = 2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

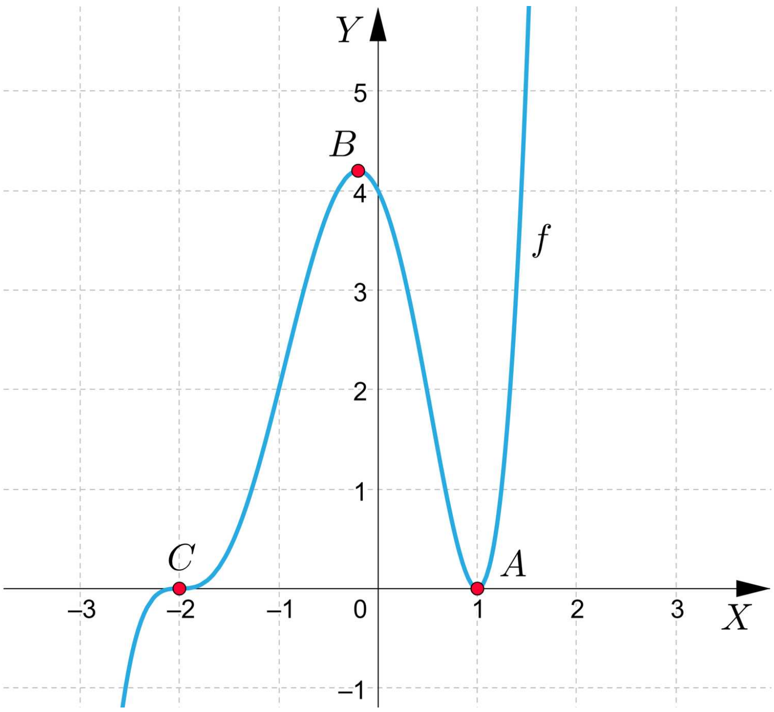
Na poniższym wykresie przedstawiono fragment pewnej funkcji.



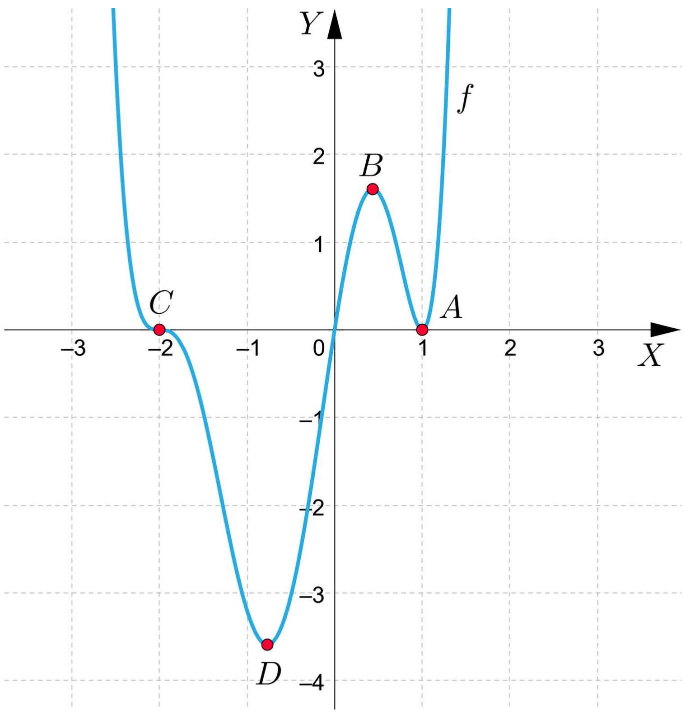
Ćwiczenie 2

Zaznacz czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe w zależności od tego czy przedstawiona na ilustracji funkcja posiada dane ekstremum.

a)

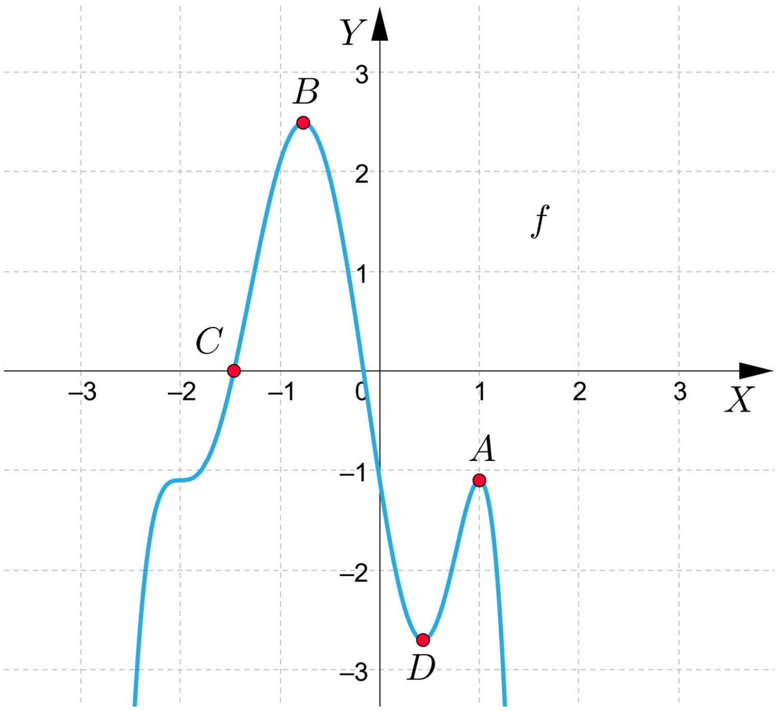


b)



Ćwiczenie 3

Na poniższym wykresie przedstawiono fragment pewnej funkcji.



Ćwiczenie 4

Uzupełnij podany tekst przeciągając w odpowiednie miejsca właściwe wyrazy.

niewłaściwym, skrajne, $30x^{30}$, ekstremum ostre, $f(x_0) \geqslant f(x)$, właściwe, $f(x_0) = f(x)$, ekstremum słabe, marginalne, $f(x_0) \leqslant f(x)$, minimum lokalne, ostra, nieostra, ekstremum

Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 należącym do dziedziny funkcji, maksimum lokalne równe $f(x_0)$, gdy można wskazać takie otoczenie punktu x_0, że dla każdego argumentu z tego otoczenia [ ]. Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 [ ] równe $f(x_0)$, gdy można wskazać takie otoczenie punktu x_0, należącego do dziedziny funkcji, że dla każdego argumentu z tego otoczenia [ ]. Jeśli istnieje takie otoczenie, w którym dla $x \neq x_0$ spełniona jest [ ] nierówność $f(x) < f(x_0)$ lub $f(x_0) < f(x)$ to mówimy, że funkcja ma w punkcie x_0 maksimum (minimum) [ ] w przeciwnym wypadku mówimy o maksimum (minimum) [ ]. Maksimum i minimum określamy terminem [ ]. Ekstremum po łacinie oznacza [ ].

Ćwiczenie 5

Narysuj wykres takiej funkcji ciągłej, która ma dokładnie trzy ekstrema lokalne: w punktach $x_1 \in (-1,\ 0)$ i $x_2 \in (0,\ 1)$ – maksimum lokalne, w punkcie $x_3 = 0$ – minimum lokalne, przy czym $f(x_1) = f(x_2)$.

Ćwiczenie 6

Narysuj wykres takiej funkcji ciągłej, która ma dokładnie 2 minima lokalne w punktach $x_1 \in (-1,\ 0)$ i $x_2 \in (0,\ 1)$, zaś w punkcie $x_3 = 0$ ma jedyne maksimum lokalne, przy czym $f(x_1) = f(x_2)$.

Ćwiczenie 7

Narysuj wykres takiej funkcji ciągłej, która ma dokładnie 2 ekstrema lokalne w punktach $x_1 \in (-1,\ 0)$ i $x_2 \in (0,\ 1)$, zaś jej jedynym miejscem zerowym jest $x_3 = 0$, przy czym $f(x_1) = -f(x_2)$.

Ćwiczenie 8

Korzystając z definicji pokaż, że funkcja $f(x) = |x+1| + 2$ ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0 = -1$.

Ćwiczenie 9

Korzystając z definicji pokaż, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0 = 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Niemczynowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ekstremum funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje pojęcie maksimum lokalnego (właściwego/niewłaściwego) funkcji;
- definiuje pojęcie minimum lokalnego (właściwego/niewłaściwego) funkcji;
- szkicuje przykłady funkcji posiadających ekstrema lokalne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja panelowa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami z poprzednich lekcji dotyczącymi monotoniczności funkcji i jej miejsc zerowych.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie" i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji o temacie: “Ekstremum funkcji”.
2. Uczniowie formułują kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3 – 4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z sekcji „Przeczytaj". Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji “Prezentacja multimedialna”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie polecenia nr 2 – 3 z sekcji “Prezentacja multimedialna”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.

4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1 – 2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3 – 5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6 – 7 z działu „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Nauczyciel podsumowuje zajęcia kładąc nacisk na mocną i słabą stronę pracy uczniów.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Ekstrema funkcji

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną można wykorzystać do powtórzenia materiału o wyznaczaniu przedziałów monotoniczności funkcji.