Podzielność wielomianów

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wielomiany jednej zmiennej są zapisywane za pomocą odpowiednich wyrażeń algebraicznych. W matematyce wyższej tworzą strukturę zwaną *pierścieniem* – mają wiele własności analogicznych do odpowiednich własności liczb całkowitych (które również tworzą strukturę *pierścienia*) . Te pojęcia wykraczają poza program nauczania matematyki w szkole. Analizując kolejne lekcje warto jednak o tym pamiętać i szukać analogii między liczbami całkowitymi i wielomianami.

W zbiorze liczb całkowitych mamy zdefiniowaną relację podzielności. Mówimy, że liczba całkowita a jest podzielna przez liczbę całkowitą $b \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita c taka, że $a = b \cdot c$. Działanie mnożenia jest określone także dla wielomianów, więc analogicznie można spróbować określić relację podzielności wielomianów.

Twoje cele

- Zapoznasz się z pojęciem podzielności wielomianów.
- Obliczysz iloraz wielomianów w niektórych przypadkach.
- Odkryjesz zależności między stopniami wielomianów i stopniem ich ilorazu.

Przeczytaj

Definicja: Podzielność wielomianów

Wielomian $W(x)$ jest **podzielny** przez niezerowy wielomian $P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$.

Możemy wtedy powiedzieć, że wielomian $Q(x)$ jest **ilorazem** wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, natomiast o wielomianie $P(x)$, że jest **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$.

W niektórych przypadkach do znalezienia dzielników wielomianu można wykorzystać wzory skróconego mnożenia.

Przykład 1

- Wielomian $W(x) = x^6 - 1$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 - 1$.
  Ilorazem tych wielomianów jest wielomian $Q(x) = x^4 + x^2 + 1$.

- Wielomian $W(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 + 1$.
  Ilorazem jest wielomian $Q(x) = x^2 + 1$.

Zauważmy, że jeżeli $W(x)$ jest wielomianem zerowym, to jest wielomianem podzielnym przez dowolny niezerowy wielomian $P(x)$. Ilorazem jest wtedy wielomian zerowy.

Własność: stopień wielomianu

Jeżeli niezerowy wielomian $W(x)$ stopnia n jest podzielny przez niezerowy wielomian $P(x)$ stopnia k, to $k \leq n$, a iloraz $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomianem stopnia $n - k$.

Przykład 2

Dany jest wielomian drugiego stopnia $W(x) = 3x^2 + x - 4$, czyli trójmian kwadratowy.

- Zapiszmy wielomian w postaci iloczynowej: $W(x) = (3x + 4)(x - 1)$.
- Wyznaczmy wielomiany, przez które wielomian $W(x)$ jest podzielny.

Przykład 3

Dany jest wielomian $W(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 6$. Wiadomo, że jest on podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 + x + 3$. Jak wyznaczyć iloraz tych wielomianów?

Przykład 4

Wiadomo, że wielomian $W(x) = 3x^3 + px^2 + qx + 42$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 - 4x - 21$. Jaką wartość mają parametry p i q?

Szukamy ilorazu wielomianu stopnia trzeciego przez wielomian stopnia drugiego - ilorazem będzie więc wielomian stopnia pierwszego - zapiszmy go jako $Q(x) = ax + b$.

$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$, czyli

$$3x^3 + px^2 + qx + 42 = \left(x^2 - 4x - 21\right)(ax + b) =$$
$$= ax^3 + (b - 4a)x^2 + (-21a - 4)x - 21b.$$

Korzystając z równości wielomianów mamy $\begin{cases} a = 3 \\ -21b = 42 \\ p = b - 4a \\ q = -21a - 4b \end{cases}$.

Po obliczeniach $a = 3$ i $b = -2$, czyli $p = -2 - 12 = -14$, a $q = -63 + 8 = -55$.

Przykład 5

Wiadomo, że wielomian $W(x) = 24x^3 - 10x^2 - 47x + 12$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = 2x - 3$. Wyznaczmy iloraz tych wielomianów wyłączając $P(x)$ przed nawias:

- Zapiszmy wielomian $W(x)$ w postaci sumy składników będących wielokrotościami wielomianu $P(x)$.
  $W(x) = 24x^3 - 36x^2 + 26x^2 - 39x - 8x + 12$.

- Wyłączmy teraz odpowiednie czynniki przed nawias.
  $W(x) = 12x^2(2x - 3) + 13x(2x - 3) - 4(2x - 3)$.

- Teraz wyłączając $2x - 3$ możemy wyznaczyć szukany iloraz.
  $W(x) = (2x - 3)\left(12x^2 + 13x - 4\right)$.

Ilorazem wielomianów $W(x)$ przez $P(x)$ jest wielomian $12x^2 + 13x - 4$.

Słownik

podzielność wielomianów

wielomian $W(x)$ jest **podzielny** przez niezerowy wielomian $P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$

stopień wielomianu jednej zmiennej

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

liczba n odpowiadająca najwyższemu wykładnikowi potęgi o podstawie x,

- jeżeli $W(x) = a_0$ i $a_0 \neq 0$, to wielomian jest stopnia 0
- jeżeli $W(x) = 0$, to jest wielomianem zerowym i nie ma określonego stopnia

stopień wielomianu $W(x)$ możemy oznaczać symbolem $\mathrm{st}(W(x))$ lub $\deg(W(x))$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Weź udział w grze, a następnie rozwiąż polecenie 2.

Polecenie 2

Wielomian $W(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = \left(x^2 + 1\right)\left(2x^2 - 3\right)$. Ponadto wiadomo,że $W(1) = 2$. Wyznacz wartości parametrów a, b, c, d, e.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Podzielność wielomianów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych,
3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej,
4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje pojęcie podzielności wielomianów,
- oblicza iloraz wielomianów w niektórych przypadkach,
- analizuje zależności między stopniami wielomianów i stopniem ich ilorazu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- liga zadaniowa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Podzielność wielomianów” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
2. Uczniowie wspólnie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli klasę na 4 grupy. Każda z grup na podstawie przykładów w sekcji „Przeczytaj” tworzy algorytm znajdowania ilorazu wielomianów. Po wykonaniu zadania liderzy każdej grupy ustalają jeden wspólny algorytm
2. Uczniowie w parach grają w grę edukacyjną. W przypadku obstawienia błędnej odpowiedzi uczeń notuje pytanie i swoją błędną odpowiedź. Po ukończeniu gry nauczyciel omawia zadania z gry, od najtrudniejszych do najłatwiejszych, zwracając uwagę na najczęściej wskazywaną błędną odpowiedź w każdym z zadań.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują indywidualnie na czas ćwiczenia 3-8 z sekcji „Sprawdź się”, Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami. Pierwszych trzech uczniów, którzy skończą bezbłędnie rozwiązywać zadania otrzymuje oceny pozytywne.

Faza podsumowująca:

1. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, zwraca uwagę na ewentualne problemy podczas ligi zadaniowej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne nr 1 i 2 przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

Materiały pomocnicze:

Wielomiany

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać grę edukacyjną jako formę powtórzenia materiału przed kartkówką.