



Rozwiązywanie nierówności wielomianowych z wykorzystaniem wykresu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Rozwiązywanie nierówności wielomianowych z wykorzystaniem wykresu

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W tym materiale pokażemy sposób rozwiązywania nierówności wielomianowej z wykorzystaniem wykresu. Metodę tę będziemy stosować wtedy, gdy nierówność wielomianowa zapisana będzie w postaci iloczynowej. Przez analizę krotności pierwiastków będziemy rozpoznawać, dla jakich argumentów wielomian przyjmuje wartości dodatnie, nieujemne, ujemne lub niedodatnie.

Aby naszkicować wykres funkcji wielomianowej najważniejsze jest określenie, dla jakich argumentów wykres funkcji wielomianowej znajduje się poniżej osi X , powyżej osi X lub na osi X . Dokładny wykres możemy otrzymać korzystając z programów komputerowych.

Twoje cele

- Naszkicujesz wykres funkcji wielomianowej.
- Określisz krotność pierwiastka odpowiedniego równania.
- Rozwiążesz nierówność wielomianową z wykorzystaniem wykresu.

Przeczytaj

Definicja: Nierówność wielomianowa

Nierównością wielomianową stopnia n nazywamy każdą nierówność postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0,$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n .

Aby rozwiązać **nierówność wielomianową**, najpierw postępujemy podobnie do rozwiązywania równań. Możemy rozłożyć odpowiedni wielomian na czynniki, a następnie obliczamy pierwiastki wielomianu.

Następnie, szkicując wykres wielomianu odczytujemy, dla jakich x wielomian przyjmuje żądane wartości.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $(x - 4)(x + 1)(x - 2) \leq 0$.

Aby rozwiązać nierówność, posłużymy się wykresem funkcji wielomianowej $y = (x - 4)(x + 1)(x - 2)$. Funkcja ma trzy pojedyncze miejsca zerowe (-1) , 2 , 4 .

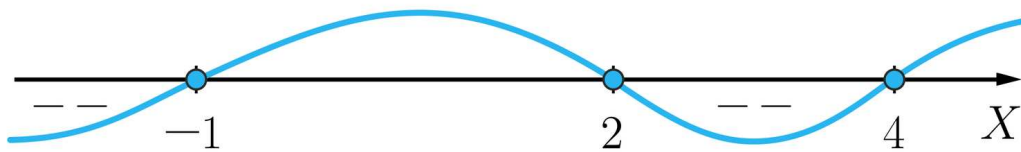
Narysujemy teraz szkic wykresu funkcji wielomianowej. Dokładny wykres możemy otrzymać korzystając z programów komputerowych. Dla nas najważniejsze jest określenie, dla jakich argumentów x wykres funkcji wielomianowej znajduje się poniżej osi X lub na osi X .

Aby wykonać szkic wykresu funkcji wielomianowej, zaznaczamy na osi X miejsca zerowe wielomianu (jeżeli istnieją). Przez te punkty na osi X przechodzi wykres. Ma on kształt „wężyka” rysowanego linią ciągłą. Wykres spotykając się z pojedynczym pierwiastkiem wielomianu „przechodzi” na drugą stronę osi X .

Ważne jest również jak rozpoczynamy rysowanie wykresu. Najczęściej zaczynamy rysować wykres od strony prawej do lewej.

Zaczynamy od góry, wtedy gdy współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest dodatni.

W naszym przykładzie współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej jest równy 1.



W tych przedziałach, gdzie wykres znajduje się pod osią X lub na osi X funkcja wielomianowa przyjmuje wartości mniejsze lub równe zero (nieododatnie).

Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-\infty, -1) \cup \langle 2, 4 \rangle$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $-x(x-1)^2(x+3) > 0$.

Obliczymy takie x , dla których odpowiednie wyrażenie jest równe zero.

$$-x(x-1)^2(x+3) = 0$$

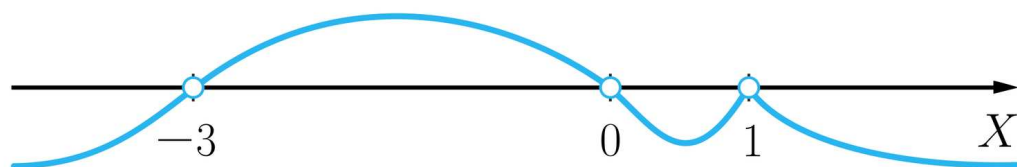
$$-x = 0 \text{ lub } (x-1)^2 \text{ lub } (x+3) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 1 \text{ (podwójny pierwiastek) lub } x = -3$$

Sporządzimy teraz szkic wykresu funkcji wielomianowej $y = -x(x-1)^2(x+3)$.

W tym celu najpierw zaznaczamy na osi X miejsca zerowe wielomianu. Wykres funkcji zaczniemy rysować od prawej strony i od dołu, ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze niewiadomy jest ujemny.

Należy również zwrócić uwagę, że liczba 1 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu, zatem wykres „odbija” się od osi X .



Zbiorem rozwiązań nierówności jest $(-3, 0)$.

Ważne!

- Jeżeli pierwiastek wielomianu ma krotność nieparzystą, to wykres funkcji wielomianowej przechodzi na drugą stronę osi X .
- Jeżeli pierwiastek wielomianu ma krotność parzystą, to wykres funkcji wielomianowej „odbija” się od osi X (jest do niej styczny).
- Jeżeli współczynnik przy najwyższej potęgze niewiadomej jest dodatni, wówczas wykres funkcji wielomianowej rysujemy od prawej strony, zaczynając od góry.
- Jeżeli współczynnik przy najwyższej potęgze niewiadomej jest ujemny, wówczas wykres funkcji wielomianowej rysujemy od prawej strony, zaczynając od dołu.

Przykład 3

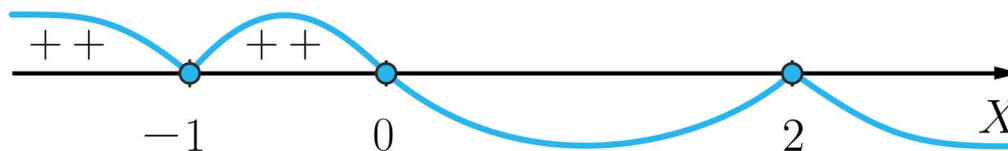
Rozwiążemy nierówność $-x^3(x+1)^2(2-x)^2 \geq 0$.

Obliczymy takie x , dla których odpowiednie wyrażenie jest równe zero.

$$-x^3(x+1)^2(2-x)^2 = 0$$

$-x^3 = 0$ (potrójny pierwiastek) lub $(x+1)^2 = 0$ (podwójny pierwiastek) lub $(2-x)^2 = 0$ (podwójny pierwiastek)

Wykres zaczniemy rysować od dołu.



$$x \in (-\infty, 0) \cup \{2\}$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty, 0) \cup \{2\}$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $(x^2 - 4)(x + 2)^3(x - 1) < 0$.

$$(x^2 - 4)(x + 2)^3(x - 1) = 0$$

$$(x^2 - 4) = 0 \text{ lub } (x + 2)^3 = 0 \text{ lub } (x - 1) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0 \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = 1$$

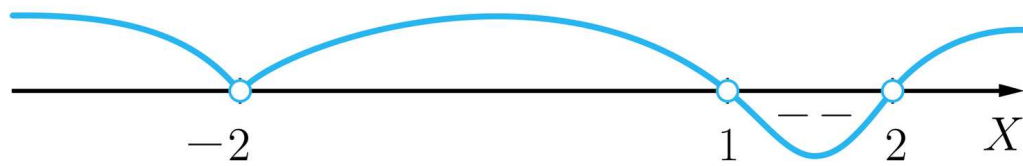
$$x = 2 \text{ lub } x = -2$$

Czyli:

(-2) – 4-krotny pierwiastek,

1 – pojedynczy pierwiastek,

2 – pojedynczy pierwiastek.



$$x \in (1, 2)$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $(1, 2)$.

Słownik

nierówność wielomianowa

każda nierówność postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0,$$

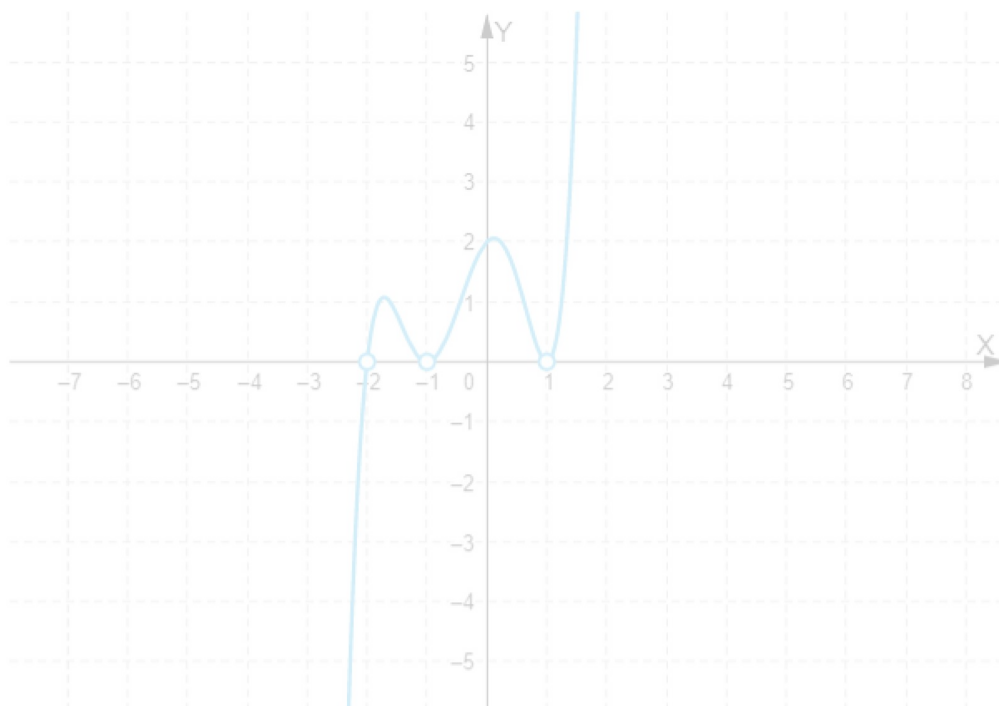
gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Przeanalizuj sposób rozwiązywania nierówności wielomianowych z wykorzystaniem wykresu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D4HnuAW1>

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność z wykorzystaniem wykresu.

$$(x - 4)^7(x + 3)^3(x - 7)^4 > 0$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozwiąż nierówność $(1 - x)(x + 1)(x + 3) \geq 0$ metodą graficzną i wybierz zbiór rozwiązań nierówności.

$(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

$\langle -3, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$

$(-3, -1) \cup (1, \infty)$

$(-\infty, -3) \cup \langle -1, 1 \rangle$

Ćwiczenie 2



Rozwiąż nierówność metodą graficzną. Połącz nierówność z odpowiednim zbiorem rozwiązań.

$$x^2(x - 3)(x + 2)^2 > 0$$

$$(-\infty, -2)$$

$$-x^2(x - 3)(x + 2) > 0$$

$$(3, \infty)$$

$$-x^2(x - 3)^2(x + 2) > 0$$

$$(-2, 0) \cup (0, 3)$$

$$(x - 3)^2(x + 2)x > 0$$

$$(-\infty, 2) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$$

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. W ilu punktach wykres funkcji wielomianowej $y = (x^2 - 9)(x + 3)^2(x^2 + 4x + 3)(x + 1)$ "odbija" się od osi X ?

3

4

2

1

Ćwiczenie 4



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

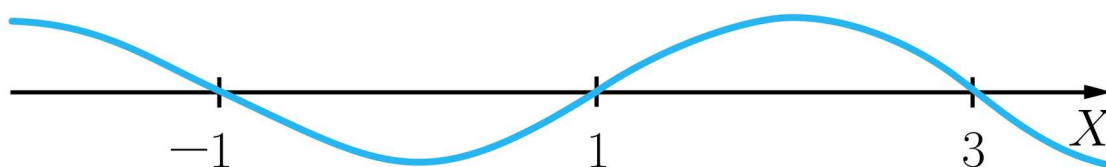
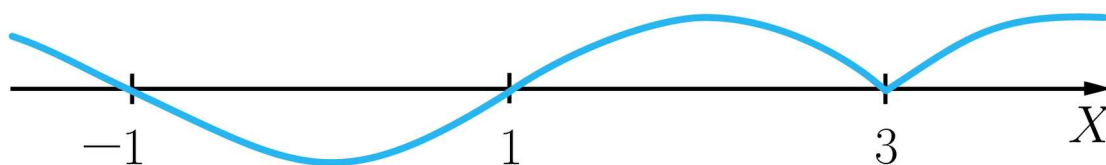
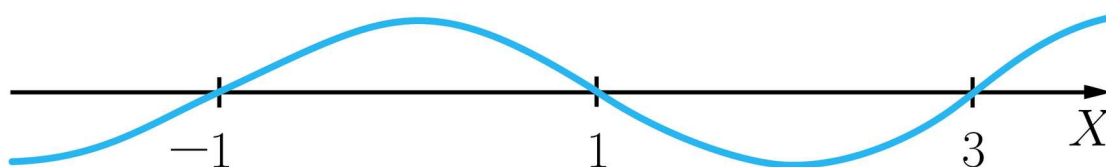
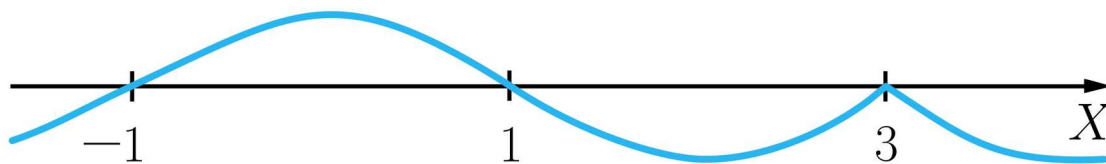
Rozwiąż nierówność $(x - 3)^2 x^2 (x + 2) \geq 0$. Najmniejsza liczba całkowita spełniająca tę nierówność to:

$x =$

Ćwiczenie 5



Który "wężyk" jest ilustracją graficzną funkcji wielomianowej $y = (x - 3)^2(x^2 - 1)$?





Ćwiczenie 6



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Rozwiąż nierówność $(x^3 + 1)(x^2 - 5x + 6) > 0$ metodą graficzną. Uzupełnij zbiór rozwiązań nierówności.

$$(-1, \boxed{}) \cup (\boxed{}, \infty)$$

Ćwiczenie 7



Wybierz i przeciągnij odpowiedni zbiór. Zbiorem rozwiązań nierówności

$-(x^2 - 4)(x^2 - 1) \geq 0$ jest:

$$\langle -2, -1 \rangle \cup \boxed{}$$

$\langle 1, 4 \rangle$ $\langle 1, 2 \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle$ $\langle -1, 1 \rangle$

Ćwiczenie 8



Zbiorem rozwiązań nierówności $-2x(x - a)^2(x + b)^3 \geq 0$ jest $\langle -4, 0 \rangle \cup \{1\}$. Podaj a i b .

Wpisz poprawne liczby.

$$a = \boxed{}$$

$$b = \boxed{}$$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie nierówności wielomianowych z wykorzystaniem wykresu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rysuje szkic wykresu funkcji wielomianowej
- określa krotność pierwiastka odpowiedniego równania
- rozwiązuje nierówność wielomianową z wykorzystaniem wykresu
- przeprowadza rozumowania związane z analizą nierówności wielomianowej, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych nierówności zapisanych w postaci iloczynu sum algebraicznych. Uczniowie podają rozwiązania tych nierówności.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela do rozwiązania 10 przykładów prostych nierówności typu: $(x + 7)x > 0$, $x^2 - 1 > 0$, $x^2 + 2 < 0$. Uczniowie na podstawie wykresów starają się podzielić nierówności na grupy, według własnych kryteriów.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Wskazują zbiór rozwiązań nierówności.
3. Przykłady rozwiązań nierówności znajdujące się w części Przeczytaj uczniowie analizują w parach. Wspólnie z nauczycielem wyjaśniają wątpliwości.
4. Uczniowie oglądają sposób rozwiązywania zadań przedstawiony w symulacji i omawiają go wraz z nauczycielem.
5. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Każdy stolik zawiera 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje bardzo dobrą ocenę.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobów rozwiązywania nierówności wielomianowych z wykorzystaniem wykresu.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie, którym nie udało się zakończyć konkursu rozwiązują pozostałe zadania w domu.

Materiały pomocnicze:

[Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może być wykorzystana przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania mapy myśli prezentującej rozwiązywanie nierówności wielomianowych na podstawie wykresów funkcji wielomianowych.