




Rozwiązywanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników

Suma dwóch liczb przeciwnych jest równa zero. Jeśli dodamy do siebie wyrażenia podobne, w których odpowiednie współczynniki są liczbami przeciwnymi, to wyrażenia te się zredukują. Własność tę wykorzystujemy podczas rozwiązywania układów równań metodą przeciwnych współczynników. Pozwala ona szybko określać, ile rozwiązań ma układ równań oraz wyznaczać te rozwiązania.

Twoje cele

- Przekształcisz równoważnie układ równań tak, aby otrzymać układ równań postaci
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
- Przekształcisz równoważnie równania składowe układu równań doprowadzając je do najprostszej postaci.
- Wyznaczysz liczbę rozwiązań układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.
- Rozwiążesz układ równań liniowych metodą przeciwnych współczynników.

Przeczytaj

Definicja: Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

gdzie a_1 i b_1 oraz a_2 i b_2 nie są równocześnie równe zero. W powyższym układzie x oraz y to niewiadome, a_1, a_2, b_1 oraz b_2 - współczynniki przy niewiadomych odpowiednio x oraz y , natomiast c_1 i c_2 nazywamy wyrazami wolnymi.

Definicja: Rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem takiego układu równań z dwiema niewiadomymi jest każda para liczb spełniających jednocześnie wszystkie równania układu.

Przy czym taki układ równań może nie mieć rozwiązania lub może mieć jedno rozwiązanie, lub nawet nieskończenie wiele rozwiązań.

Definicja: Układ równań oznaczony

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest dokładnie jedna para liczb, nazywamy układem oznaczonym.

Definicja: Układ równań nieoznaczony

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest nieskończenie wiele par liczb, nazywamy układem nieoznaczonym.

Definicja: Układ równań sprzeczny

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, który nie posiada rozwiązań, nazywamy układem sprzecznym.

Definicja: Równoważne układy równań

Dwa układy równań liniowych (z tymi samymi niewiadomymi) nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Twierdzenie: Równoważny układ równań

Jeśli obie strony każdego z równań (lub jednego z nich) danego układu równań pomnożymy przez dowolne liczby różne od zera, a następnie równania te dodamy stronami i tak otrzymanym równaniem zastąpimy jedno z równań układu, to otrzymany układ równań jest równoważny danemu.

Ten fakt wykorzystujemy rozwiązując układy równań metodą przeciwnych współczynników – mnożymy jedno z równań przez taką liczbę, by współczynniki przy jednej ze zmiennych były liczbami przeciwnymi a następnie dodajemy równania stronami.

Przykład 1

Rozwiążemy układ równań liniowych metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 2y + 3x = 2 \end{cases}$$

Porządkujemy kolejność niewiadomych w układzie równań.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez liczbę (-3) , a obie strony drugiego równania przez liczbę 2 .

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 & | \cdot (-3) \\ 3x + 2y = 2 & | \cdot 2 \end{cases}$$

Wówczas współczynniki liczbowe przy niewiadomej x będą liczbami przeciwnymi.

Otrzymane równania dodajemy stronami.

$$+ \begin{cases} -6x - 9y = 3 \\ 6x + 4y = 4 \end{cases} \quad -5y = 7 \quad | : (-5)$$

Rozwiązujemy równanie z niewiadomą y .

$$y = -1\frac{2}{5}$$

Otrzymanym w ten sposób równaniem możemy zastąpić pierwsze z równań układu.

$$\begin{cases} y = -1\frac{2}{5} \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

Postawiamy otrzymaną wartość y do drugiego z równań układu.

$$\begin{cases} y = -1\frac{2}{5} \\ 3x - 2 \cdot 1\frac{2}{5} = 2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\begin{cases} y = -1\frac{2}{5} \\ 3x - 2\frac{4}{5} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1\frac{2}{5} \\ 3x = 2 + 2\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1\frac{2}{5} \\ x = 4\frac{4}{5} : 3 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb będącą rozwiązaniem danego układu równań.

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = -1\frac{2}{5} \end{cases}$$

(Sprawdź!)

Przykład 2

Zauważmy, że ten sam [układ równań liniowych](#) możemy rozwiązać redukując niewiadomą y .

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez liczbę (-2) , a obie strony drugiego równania przez liczbę 3 .

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \mid \cdot (-2) \\ 3x + 2y = 2 \mid \cdot 3 \end{cases}$$

Wówczas współczynniki przy niewiadomej y będą liczbami przeciwnymi.

Otrzymane równania dodajemy stronami.

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -4x - 6y = 2 \\ 9x + 6y = 6 \end{cases} \\ \hline \end{array} \quad 5x = 8 \mid : 5$$

Rozwiązujemy równanie z niewiadomą x .

$$x = \frac{8}{5}$$

Otrzymanym w ten sposób równaniem możemy zastąpić pierwsze z równań układu.

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

Postawiamy otrzymaną wartość x do drugiego z równań układu.

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ 3 \cdot \frac{8}{5} + 2y = 2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ \frac{24}{5} + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ 2y = 2 - 4\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = -1\frac{2}{5} \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb będącą rozwiązaniem danego układu równań.

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = -1\frac{2}{5} \end{cases}$$

Przykład 3

Korzystając z metody przeciwnych współczynników, wyznaczmy liczbę rozwiązań układów równań liniowych.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 12y = 4 \\ -x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 12y = 4 \\ -x - 4y = 4 \mid \cdot 3 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 3x + 12y = 4 \\ -3x - 12y = 12 \end{cases} \quad 0 = 16$$

Jest to układ sprzeczny. Taki układ równań nie posiada rozwiązań.

$$\text{b) } \begin{cases} -2x + 6y = 10 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 6y = 10 \\ x - 3y = -5 \mid \cdot 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -2x + 6y = 10 \\ 2x - 6y = -10 \end{cases} \quad 0 = 0$$

Jest to układ nieoznaczony. Posiada on nieskończenie wiele rozwiązań postaci

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 4y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

Redukujemy niewiadomą x .

$$\begin{cases} x - 4y = 3 \mid \cdot (-2) \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami.

$$+ \begin{cases} -2x + 8y = -6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad 5y = -5$$

Obliczmy wartość niewiadomej y .

$$y = -1$$

$$\begin{cases} x - 4y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Podstawimy otrzymaną wartość y do pierwszego równania i obliczamy niewiadomą x .

$$\begin{cases} x - 4 \cdot (-1) = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4 = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Jest to układ oznaczony. Posiada on jedno rozwiązanie postaci $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Przykład 4

Rozwiążemy układ równań liniowych metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} \frac{-5x+3y}{5} - \frac{x-y}{2} = 1 \\ 4(x+2) - 5(2-y) = 7x-y \end{cases}$$

Aby móc zastosować tę metodę, musimy doprowadzić układ równań do najprostszej postaci. Możemy więc pomnożyć obie strony pierwszego równania przez 10.

$$\begin{cases} 2(-5x+3y) - 5(x-y) = 10 \cdot 1 \\ 4(x+2) - 5(2-y) = 7x-y \end{cases}$$

W każdym z równań usuwamy nawiasy, redukujemy wyrażenia podobne i porządkujemy układ.

$$\begin{cases} -10x + 6y - 5x + 5y = 10 \\ 4x + 8 - 10 + 5y = 7x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -15x + 11y = 10 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$$

Mnożymy teraz obie strony drugiego równania przez liczbę (-5) , aby otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej x .

$$\begin{cases} -15x + 11y = 10 \\ 15x - 30y = -10 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami.

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -15x + 11y = 10 \\ 15x - 30y = -10 \end{cases} \\ \hline \end{array} \quad -19y = 0$$

$$y = 0$$

Otrzymane wyrażenie wstawiamy do układu $\begin{cases} -15x + 11y = 10 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$ w miejsce pierwszego równania.

Następnie obliczamy niewiadomą x .

$$\begin{cases} y = 0 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -3x - 0 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$, będącą rozwiązaniem tego układu równań.

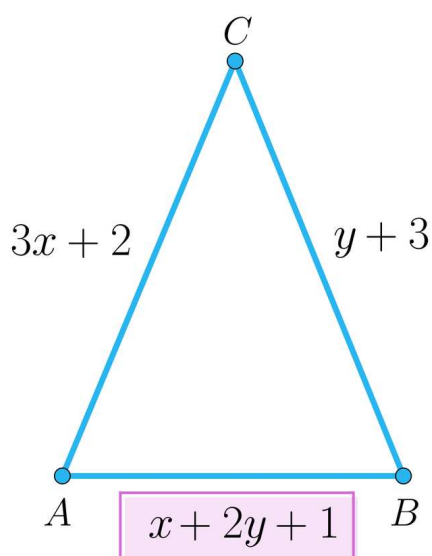
Zauważmy, że stosując tę metodę, pomimo dużych liczb pojawiających się w układzie równań

$$\begin{cases} -15x + 11y = 10 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases}$$

udało się nam sprawnie znaleźć jego rozwiązanie.

Przykład 5

Obliczymy długości boków trójkąta równoramiennego ABC przedstawionego na poniższym rysunku, wiedząc, że podstawa AB jest o 5 dłuższa od jednego z ramion.



Zapisujemy i porządkujemy odpowiedni układ równań.

$$\begin{cases} 3x + 2 = y + 3 \\ x + 2y + 1 = y + 3 + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3 - 2 \\ x + 2y - y = 8 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

W tym układzie równań, przed niewiadomą y znajdują się przeciwne współczynniki, a zatem możemy dodać równania stronami i rozwiązać ten układ [metodą przeciwnych współczynników](#).

$$+ \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad 4x = 8$$

$$x = 2$$

Obliczamy teraz niewiadomą y .

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Możemy teraz obliczyć długości boków trójkąta ABC .

$$|AB| = x + 2y + 1 = 13$$

$$|BC| = y + 3 = 8$$

$$|AC| = 3x + 2 = 8.$$

Przykład 6

Zbadamy, dla jakich wartości parametru k , rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} 2x + y = k + 1 \\ x - 2y = k \end{cases}$$

są pary liczb dodatnich.

Aby wyznaczyć rozwiązanie układu równań, możemy pomnożyć drugie równanie przez liczbę (-2) . Otrzymamy wtedy przeciwne współczynniki przy niewiadomej x .

$$\begin{cases} 2x + y = k + 1 \\ x - 2y = k \mid \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = k + 1 \\ -2x + 4y = -2k \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami i wyznaczamy niewiadomą y .

$$+ \begin{cases} 2x + y = k + 1 \\ -2x + 4y = -2k \end{cases} \quad 5y = 1 - k$$

$$y = \frac{1-k}{5}$$

Możemy zastąpić otrzymaną równością pierwsze z równań układu. Następnie wyznaczamy niewiadomą x .

$$\begin{cases} y = \frac{1-k}{5} \\ x - 2y = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1-k}{5} \\ x - 2 \cdot \frac{1-k}{5} = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1-k}{5} \\ x = k + 2 \cdot \frac{1-k}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1-k}{5} \\ x = \frac{5k}{5} + \frac{2-2k}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1-k}{5} \\ x = \frac{2+3k}{5} \end{cases}$$

Sprawdzamy dla jakich k liczby x i y są liczbami dodatnimi.

$$y = \frac{1-k}{5} > 0 \Leftrightarrow 1 - k > 0 \Leftrightarrow k < 1$$

$$x = \frac{2+3k}{5} > 0 \Leftrightarrow 2 + 3k > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{2}{3}$$

$$\text{A zatem } \begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \left(-\frac{2}{3}, 1\right).$$

Słownik

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układ równań postaci

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

równoważne układy równań

układy równań, które mają ten sam zbiór rozwiązań

układ równań oznaczony

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest dokładnie jedna para liczb

układ równań nieoznaczony

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest nieskończenie wiele par liczb

układ równań sprzeczny

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, który nie posiada rozwiązań

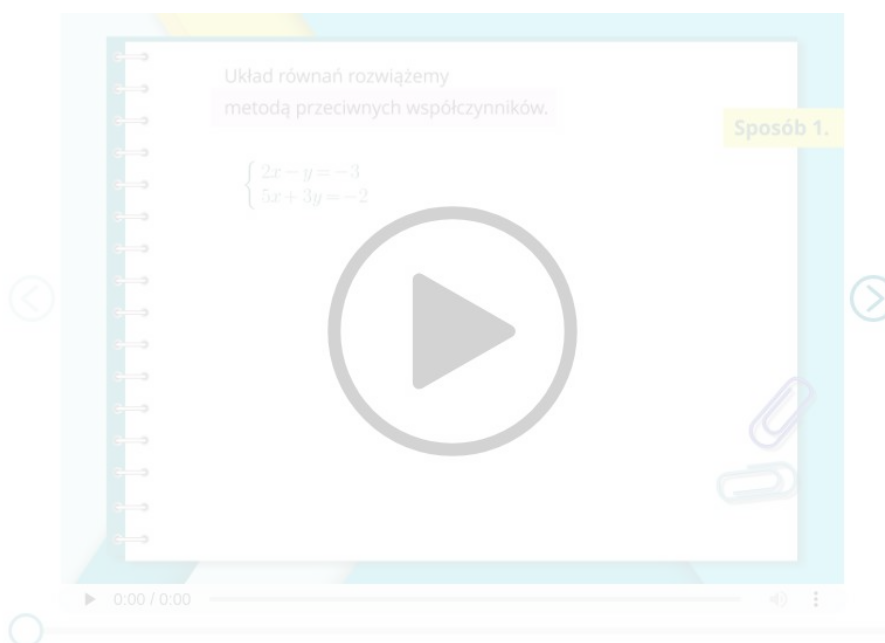
metoda przeciwnych współczynników

metoda polegająca na pomnożeniu obu stron jednego lub każdego równania przez dowolną liczbę różną od zera, tak aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki, dzięki czemu po dodaniu do siebie równań stronami można obliczyć jedną z niewiadomych

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną przedstawiającą zasadę rozwiązywania układów równań metodą przeciwnych współczynników.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1BJvQwWw>

Polecenie 2

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$$

metodą przeciwnych współczynników:

a) redukując niewiadomą x ;

b) redukując niewiadomą y .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} -7x + 4y = 2 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

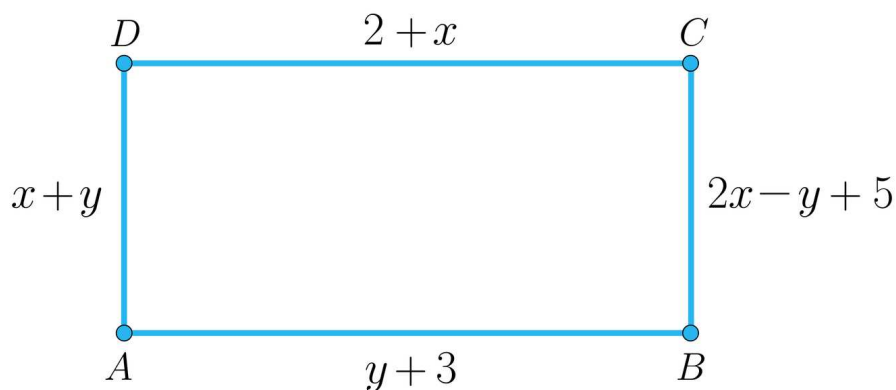


Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6

Czworokąt $ABCD$, przedstawiony na rysunku, jest prostokątem.



Ćwiczenie 7



Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników $\begin{cases} x - y = m \\ 3x + 2y = m + 5 \end{cases}$.

Dla jakich wartości parametru m rozwiązanie układu równań spełnia warunek $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$?

Ćwiczenie 8



Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} nx - ny = 4 \\ (n - 1)x + ny = 5 \end{cases}, n \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$$

Podaj wartość wyrażenia $\frac{y}{x}$.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie układów równań z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza liczbę rozwiązań układu równań liniowych
- rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników
- tworzy algorytmy rozwiązywania układów równań liniowych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- dyskusja
- stoliki zadaniowe

Formy pracy:

- praca całego zespołu klasowego
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie, metodą burzy mózgów, przypominają poznane wcześniej rodzaje układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi i sposoby odnajdywania ich rozwiązań.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, pracując w parach, analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów, wyjaśnia wątpliwości.
3. Wspólnie starają się podsumować umiejętności nabyte po analizie przykładów.
4. Jako podsumowanie omawiają prezentację multimedialną.
5. Uczniowie pracują metodą stolików zadaniowych (na każdym stoliku po dwa, wybrane przez nauczyciela, ćwiczenia interaktywne). Rozwiązują ćwiczenia interaktywne, pracując w grupach wyznaczonych przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Metoda przeciwnych współczynników rozwiązywania układów równań

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może być wykorzystana przez uczniów do utrwalenia wiadomości z lekcji oraz przy powtórzeniu wiadomości dotyczących układów równań liniowych.