Dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych

Dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych

Źródło: Andrew Buchanan, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Okazuje się, że w zbiorze liczb całkowitych można udowodnić mnóstwo twierdzeń dotyczących podzielności.

Niektóre z zaprezentowanych tutaj własności będą wręcz oczywiste, inne zaskakujące. Przy okazji wspomnimy postać Diofantosa – greckiego matematyka żyjącego w III wieku n.e. w Aleksandrii, na pamiątkę którego pewien typ równań nazywamy równaniami diofantycznymi...

Twoje cele

- Udowodnisz twierdzenia dotyczące podzielności w zbiorze liczb całkowitych.
- Wykorzystasz własności podzielności w zbiorze liczb całkowitych.

Przeczytaj

W tej lekcji zajmiemy się głównie dowodzeniem twierdzeń.

Przykład 1

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $n^2 - n$ jest parzysta.

Sprawdźmy najpierw na kilku przykładach, czy teza tego twierdzenia jest spełniona:

Liczba całkowita n	Wartość wyrażenia $n^2 - n$	Odpowiedź
4	$4^2 - 4 = 12$	$2 \mid 12$
3	$3^2 - 3 = 6$	$2 \mid 6$
0	$0^2 - 0 = 0$	$2 \mid 0$
-5	$(-5)^2 - (-5) = 30$	$2 \mid 30$
-6	$(-6)^2 - (-6) = 36$	$2 \mid 36$

We wszystkich sprawdzonych przypadkach teza jest spełniona, ale nawet gdybyśmy sprawdzili dużo więcej liczb naturalnych n, nie byłby to dowód twierdzenia.

Potrzebujemy rozważania ogólnego.

Dowód:

Zauważmy, że $n^2 - n = n(n-1)$, co oznacza, że $n^2 - n$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych.

Ponieważ co druga liczba całkowita jest parzysta, więc dokładnie jedna z liczb n i $n-1$ jest podzielna przez 2.

Iloczyn liczby parzystej przez dowolną liczbę całkowitą jest parzysty, zatem liczba $n(n-1) = n^2 - n$ również jest parzysta.

Przykład 2

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

Ponownie sprawdzimy tezę twierdzenia dla kilku liczb całkowitych n:

Liczba całkowita n	Wartość wyrażenia $n^3 - n$	Odpowiedź
4	$4^3 - 4 = 60$	$6 \mid 60$
3	$3^3 - 3 = 24$	$6 \mid 24$
0	$0^3 - 0 = 0$	$6 \mid 0$

Liczba całkowita n	Wartość wyrażenia $n^3 - n$	Odpowiedź
-5	$(-5)^3 - (-5) = -120$	$6 \mid (-120)$
-6	$(-6)^3 - (-6) = -210$	$6 \mid (-210)$

Dla rozważanych liczb teza jest spełniona. Potrzebujemy jednak dowodu.

Dowód:

Zauważmy, że $n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right) = n(n-1)(n+1)$ – przy tym przekształceniu skorzystaliśmy ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Zatem rozważane wyrażenie jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych: $n-1$, n, $n+1$.

Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych przynajmniej jedna jest parzysta (albo jest to liczba n, albo liczby $n-1$ i $n+1$).

Ponadto wśród trzech kolejnych liczb całkowitych dokładnie jedna dzieli się przez 3.

Ponieważ liczby 2 i 3 są względnie pierwsze, to iloczyn liczb, z których jedna jest podzielna przez 2 i jedna jest podzielna przez 3, dzieli się przez 6.

Przykład 3

Udowodnimy, że równanie $x^3 - x - 1111 = 0$ nie jest spełnione przez żadną liczbę całkowitą.

Dowód:

Zauważmy, że podane równanie można przekształcić do postaci $x(x-1)(x+1) = 1111$.

Dla dowolnej liczby całkowitej x lewa strona równania jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, co oznacza, że jest podzielna przez 3.

Prawa strona równania nie dzieli się przez 3, zatem otrzymujemy sprzeczność, bo liczba podzielna przez 3 nie może być równa liczbie niepodzielnej przez 3.

Oznacza to, że wyjściowe równanie nie jest spełnione przez żadną liczbę całkowitą.

Powyższe równanie jest przykładem **równania diofantycznego**, czyli równania, którego rozwiązań szukamy w zbiorze liczb całkowitych (lub jego podzbiorach). Równania diofantyczne swoją zawdzięczają greckiemu matematykowi z III wieku n.e.

Diofantos jest znany głównie ze swojego dzieła *Arytmetyka*, w którym opisywał sposoby rozwiązywania równań i zadań tekstowych prowadzących do równań.

Uważany jest za ojca języka algebraicznego, choć swoje zadania rozwiązywał głównie opisowo.

Diofantos
Źródło: nieznany, dostępny w internecie: www.ru.wikipedia.org.

Przykład 4

Wykażemy, że różnica czwartych potęg dwóch liczb całkowitych różniących się o 2 jest podzielna przez 16.

Dowód:

Mamy do wykazania, że dla dowolnej liczby całkowitej n, $n^4 - (n-2)^4$ dzieli się przez 16 .

Korzystając ze wzoru $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ możemy wykonać następujące przekształcenia

$$n^4 - (n-2)^4 = \left[n^2\right]^2 - \left[(n-2)^2\right]^2 = \left[n^2 - (n-2)^2\right] \cdot \left[n^2 + (n-2)^2\right] =$$

$$= [n - (n-2)] \cdot [n + (n-2)] \cdot \left[n^2 + (n-2)^2\right] =$$

$$= 2 \cdot (2n-2) \cdot \left[n^2 + (n-2)^2\right] =$$

Korzystając ze wzoru:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

możemy kontynuować przekształcanie:

$$= 4 \cdot (n-1)\left(n^2 + n^2 - 4n + 4\right) = 4 \cdot (n-1)\left(2n^2 - 4n + 4\right) =$$

$= 8 \cdot (n-1)\left(n^2 - 2n + 2\right)$

Zauważmy teraz, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to liczba $n-1$ jest liczbą parzystą.

Zaś jeśli n jest liczbą parzystą, to $n^2 - 2n + 2$ jest liczbą parzystą.

Zatem niezależnie od parzystości liczby n któryś z nawiasów $(n-1)$ lub $\left(n^2 - 2n + 2\right)$ jest parzysty. Iloczyn liczby parzystej i liczby 8 jest podzielny przez 16.

Ważne!

Iloczyn kolejnych liczb naturalnych począwszy od liczby 1 do liczby n oznaczamy $n!$ i czytamy „n silnia”.

Na przykład: $1! = 1$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Przykład 5

Udowodnimy, że liczba $26!$ dzieli się przez 1000000.

Dowód:

Liczba $26!$ to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do 26.

Wśród czynników znajdują się liczby $5, 10, 15, 20$ i 25 oraz liczby $2, 4$ i 6.

Iloczyn wybranych czynników to
$(5 \cdot 2) \cdot (15 \cdot 6) \cdot (25 \cdot 4) \cdot (10 \cdot 20) = 10 \cdot 90 \cdot 100 \cdot 200 = 18000000$.

Ponieważ spośród czynników liczby $26!$ można wybrać takie, których iloczyn jest równy liczbie 18000000, która jest podzielna przez 1000000, więc liczba $26!$ również jest podzielna przez 1000000.

Przykład 6

Udowodnimy, że liczba $3^{15} + 3^{16} + 3^{17}$ jest podzielna przez 13.

Dowód:

Wykonajmy następujące przekształcenia:

$3^{15} + 3^{16} + 3^{17} = 3^{15} + 3^{1+15} + 3^{2+15} = 3^{15} + 3 \cdot 3^{15} + 3^2 \cdot 3^{15} =$

$= 3^{15} \cdot (1 + 3 + 9) = 3^{15} \cdot 13$

Ponieważ liczba 3^{15} jest całkowita, więc iloczyn $3^{15} \cdot 13$ jest liczbą podzielną przez 13.

Słownik

Diofantos

grecki matematyk żyjący w Aleksandrii w III w n.e; znany głównie ze swojego dzieła w 13 księgach zwanego *Arytmetyka*, w którym opisuje zagadnienia związane z rozwiązywaniem równań

równanie diofantyczne

równanie, którego rozwiązań szukamy w zbiorze liczb całkowitych (lub jego podzbiorach)

silnia

działanie jednoargumentowe, które liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje iloczyn wszystkich liczb naturalnych dodatnich niewiększych od danej liczby, ponadto liczbie zero przyporządkowuje liczbę 1; silnię oznaczamy wykrzyknikiem: $n!$; czytamy “n silnia”; zatem $0! = 1$, $1! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ dla liczb naturalnych n większych od 1

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj dowody twierdzeń zawarte w poniższej animacji.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D13rknkQC

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego dowodzenia podzielności liczb całkowitych.

Polecenie 2

Udowodnij twierdzenie:

Jeżeli suma cyfry jedności, podwojonej cyfry dziesiątek i czterokrotności cyfry setek liczby naturalnej trzycyfrowej dzieli się przez 8, to ta liczba dzieli się przez 8.

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 dzieli się przez 81.

Ćwiczenie 2

Wykaż, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą to liczba $(n-1)(n+1)(n+3)$ jest liczbą podzielną przez 48.

Ćwiczenie 3

Wykaż, że liczba $2^{13}+2^{15}+2^{17}$ jest podzielna przez 21.

Ćwiczenie 4

Iloma zerami kończy się podana liczba? Wpisz liczbę kolejnych zer licząc od rzędu jedności. Jeśli brak wpisz "0".

Liczba w postaci silni	Liczba końcowych zer
$4!$	
$5!$	
$9!$	
$10!$	
$14!$	
$15!$	
$23!$	
$30!$	

Ćwiczenie 5

Udowodnij, że liczba $16!$ jest podzielna przez 2^{15}.

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Suma trzech liczb całkowitych jest nieparzysta. Wówczas:

- Przynajmniej jedna z nich jest nieparzysta
- Ich iloczyn jest parzysty.
- Ich iloczyn jest nieparzysty.

Ćwiczenie 8

Wykaż, że równanie $6x^2 + 14 = 21y^2$ nie ma rozwiązań całkowitych.

Ćwiczenie 9

Wykaż, że liczba $\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)$ jest dzielnikiem liczby $1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7$.
Uporządkuj poniższe wypowiedzi, aby otrzymać dowód powyższego twierdzenia.

- Jeszcze raz możemy wyłączyć przed nawias wspólny czynnik $\left(1+2013^2\right)(1+2013)\left(1+2013^4\right)$.
- Z drugiej, trzeciej i czwartej pary możemy wyłączyć wspólne czynniki przez nawias: $\left(1+2013^2\right)+2013\cdot\left(1+2013^2\right)+2013^4\cdot\left(1+2013^2\right)+2013^5\cdot\left(1+2013^2\right)$.
- Dwa ostatnie składniki mają wspólny czynnik w postaci 2013^4, który możemy wyłączyć przed nawias otrzymując $\left(1+2013^2\right)\cdot\left[(1+2013)+2013^4\cdot(1+2013)\right]$.
- Ponownie możemy wyłączyć przed nawias wspólny czynnik: $\left(1+2013^2\right)\left(1+2013+2013^4+2013^5\right)$.
- Połączmy składniki w pary: $\left(1+2013^2\right)+\left(2013+2013^3\right)+\left(2013^4+2013^6\right)+\left(2013^5+2013^7\right)$.
- W drugim nawiasie również możemy połączyć składniki w pary: $\left(1+2013^2\right)\cdot\left[(1+2013)+\left(2013^4+2013^5\right)\right]$.
- Powyższe wyrażenie przekształca się do postaci $2014\cdot\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)$.
- Zaczniemy od zamiany kolejności składników w rozważanej sumie: $1+2013^2+2013+2013^3+2013^4+2013^6+2013^5+2013^7$.
- Przekształcimy wyrażenie: $1+2013+2013^2+2013^3+2013^4+2013^5+2013^6+2013^7$.
- Ponieważ każdy z czynników powyższego iloczynu jest liczbą naturalną, więc rozważana liczba jest podzielna przez $\left(1+2013^2\right)\left(1+2013^4\right)$.

Ćwiczenie 10

Udowodnij, że liczba $\left(n^2 - 4\right)\left(n^3 - n\right)$ jest podzielne przez 5 dla dowolnej liczby całkowitej n.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:
2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż: a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych, b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się
- Udowodnisz twierdzenia dotyczące podzielności w zbiorze liczb całkowitych.
- Wykorzystasz własności podzielności w zbiorze liczb całkowitych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- śniegowa kula;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”, wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1 „Przeanalizuj dowody twierdzeń zawarte w poniższej animacji”. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia, najważniejsze etapy realizacji polecenia.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel prosi uczniów o podsumowanie zgromadzonej wiedzy w temacie „Dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocniczze

Liczby naturalne, całkowite i wymierne

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych”.