

## Przemiany energii kinetycznej i potencjalnej w ruchu drgającym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Przemiany energii kinetycznej i potencjalnej w ruchu drgającym

Źródło: dostępny w internecie: <https://www.istockphoto.com/pl/zdjecie/kozystyska-newtona-gm465044128-59504348> [dostęp 2.07.2019], iStockphoto, tylko do użytku edukacyjnego na [zpe.gov.pl](http://zpe.gov.pl).

### Czy to nie ciekawe?

Układ wykonujący drgania harmoniczne, czyli oscylator harmoniczny, może zmagazynować energię. I, o ile nie występują w układzie siły oporu, takie jak tarcie czy lepkość, tak zmagazynowana energia nie ulegnie rozproszeniu. Będzie jedynie cyklicznie zmieniała swoją formę.



Rys. a. Siodelko rowerowe na sprężynach

Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/zh/photos/saddle-bike-sport-travel-5141605/> [dostęp 29.05.2022], domena publiczna.

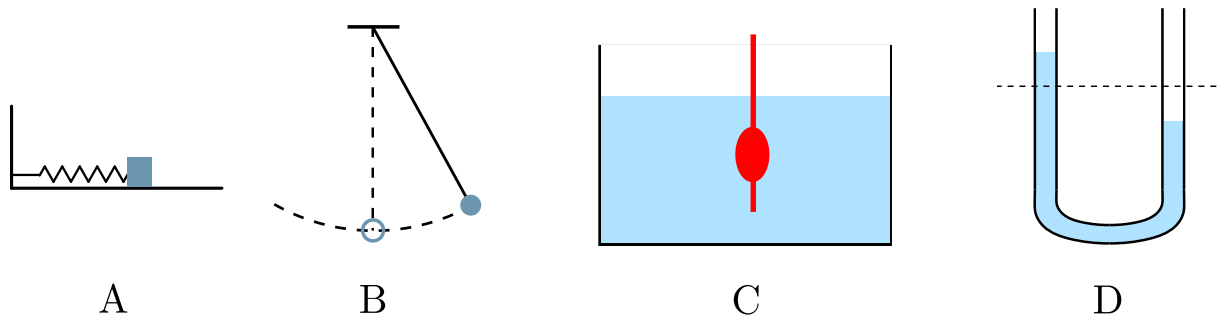
### Twoje cele

- dowiesz się, jak obliczyć energię kinetyczną i potencjalną oscylatora harmonicznego,
- poznasz zasadę zachowania energii dla oscylatora harmonicznego,
- przeanalizujesz przemiany energii w ruchu drgającym,
- zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań.

# Przeczytaj

## Warto przeczytać

Układy, takie jak ciężarek przyczepiony na sprężynie, wahadło, sześcian zanurzony w cieczy lub ciecz w U-kształtnej rurce, mają wspólną cechę. Wytrącone ze stanu równowagi zaczynają wykonywać drgania, czyli okresowe oscylacje wokół położenia równowagi.



Rys. 1. Przykładowe układy drgające: A - klocek na sprężynie, B - wahadło, C - sześcian zanurzony w wodzie, D - woda w U-rurce

Rozważmy układ prostego oscylatora harmonicznego. Jego położenie, a dokładniej odchylenie od punktu równowagi, opiszemy równaniem:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

gdzie  $A$  jest amplitudą, czyli maksymalną wartością wychylenia,  $\omega$  to częstość kołowa drgań, od której zależy okres drgań oscylatora  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , a  $\varphi$  jest fazą początkową.

Współrzędną prędkości opisuje równanie:

$$v_x(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Znajdźmy teraz wyrażenie opisujące energię kinetyczną i potencjalną takiego oscylatora.

**Energia kinetyczna** układu to energia ruchu, czyli zależna od jego prędkości:  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ . Dla omawianego oscylatora otrzymujemy więc energię kinetyczną o postaci:

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

**Energia potencjalna** oscylatora harmonicznego jest funkcją kwadratową jego wychylenia z minimum w punkcie równowagi i ma postać  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ . Parametr  $k$  to współczynnik proporcjonalności siły harmonicznego do wychylenia, związany z częstością kołową  $\omega$  i masą oscylatora wyrażeniem  $k = m\omega^2$ .

Wstawiając zależność  $x(t)$  otrzymujemy:

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 (\omega t + \varphi)$$

Korzystając ze związku  $k = m\omega^2$  powyższe równanie przybiera postać:

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \varphi)$$

Częstość kołowa oscylatora zależy od rodzaju układu drgającego (Rys. 1.). Na przykład dla ciężarka na sprężynie  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , a współczynnik  $k$  jest nazywany jest współczynnikiem sprężystości lub **stałą sprężystości sprężyny**. W przypadku wahadła matematycznego  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , gdzie  $l$  to długość nici, a  $g$  - przyspieszenie ziemskie. Z kolei drgania słupa wody o całkowitej długości  $l$  w U-rurce zachodzą z częstością kołową  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ .

Obliczmy teraz **całkowitą energię oscylatora**, sumując energię kinetyczną i potencjalną:

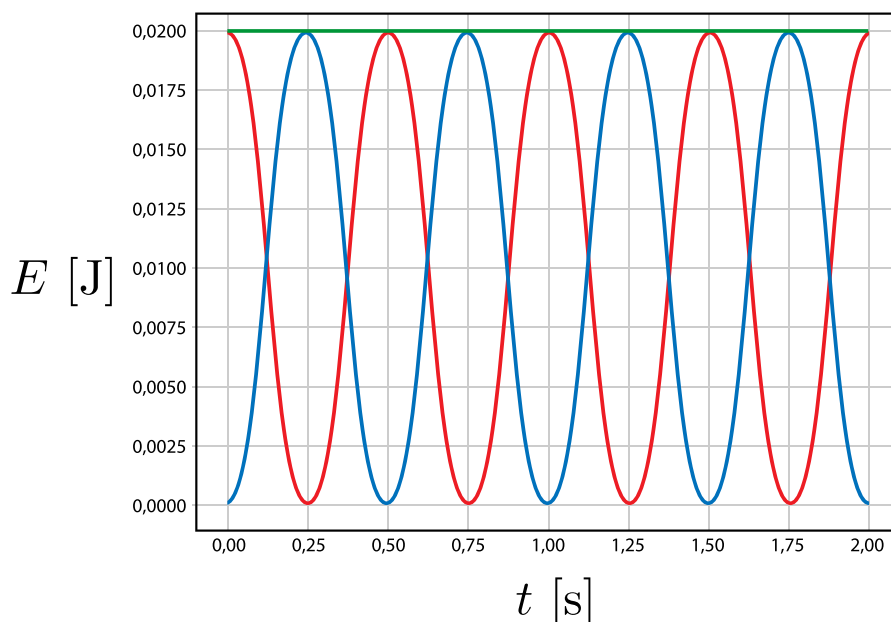
$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 (\omega t + \varphi).$$

Po wyłączeniu kilku stałych wielkości przed nawias otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\sin^2 (\omega t + \varphi) + \cos^2 (\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

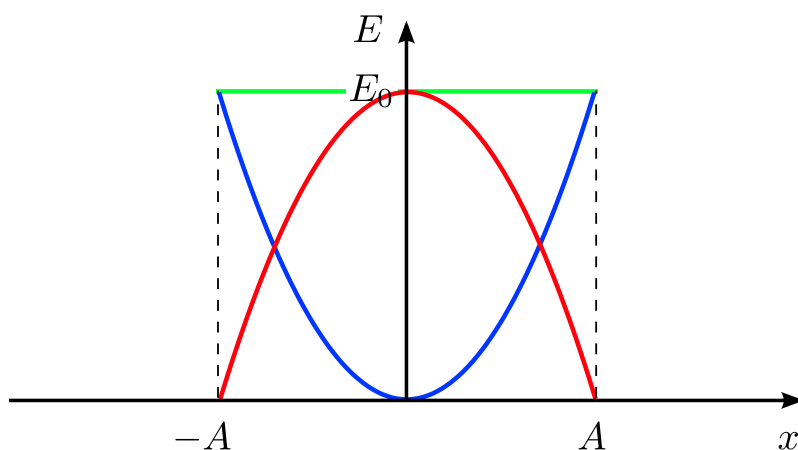
W ostatnim kroku skorzystaliśmy z „jedynki trygonometrycznej” i otrzymaliśmy stałą (czyli niezależną od czasu) wartość całkowitej energii. Całkowita energia mechaniczna oscylatora jest proporcjonalna do jego masy, kwadratu amplitudy i kwadratu częstości, która zależy od parametrów układu drgającego.

Przeanalizujmy na wykresie (Rys. 2.) zależność energii kinetycznej (krzywa czerwona) i potencjalnej (krzywa niebieska) od czasu.



Rys. 2. Zależność energii potencjalnej (niebieska krzywa), kinetycznej (czerwona krzywa) i całkowitej (zielona) od czasu ciężarka o masie  $m = 100$  g wykonującego drgania o okresie 1 s i amplitudzie 10 cm

Oscylator w tym przykładzie w chwili początkowej przechodził przez położenie równowagi  $x = 0$ . Tak więc w chwili  $t = 0$  energia potencjalna wynosi 0, natomiast energia kinetyczna ma wartość maksymalną. Energia kinetyczna i potencjalna są przesunięte w fazie o dokładnie 180 stopni ( $\pi$  radianów), a energia całkowita jest stała. Przemiany energii kinetycznej i potencjalnej można także przedstawić na wykresie zależności energii oscylatora od wychylenia z położenia równowagi (Rys. 3.).



Rys. 3. Zależność energii kinetycznej (czerwona krzywa), potencjalnej (niebieska krzywa) i całkowitej (zielona krzywa) oscylatora od położenia. Energia całkowita jest stała

Wniosek, jaki płynie z powyższych rozważań jest następujący: całkowita energia oscylatora jest stała, ulega cyklicznej zmianie formy z energii kinetycznej do potencjalnej. Za każdym razem, gdy układ przechodzi przez punkt równowagi, jego energia potencjalna jest zerowa, a całkowita energia układu ma postać energii kinetycznej. W momencie, gdy układ jest wychylony od położenia równowagi do punktu maksymalnego wychylenia, całkowita energia ma formę energii potencjalnej, a energia kinetyczna jest zerowa (Rys. 3.).

## Słowniczek

### Energia potencjalna sprężystości

(ang.: *elastic potential energy*) praca, jaką należy wykonać, by ścisnąć lub rozciągnąć sprężynę poczynając od stanu równowagi.

### Stała sprężystości sprężyny

(ang.: *spring constant*) ozn.  $k$  – stała materiałowa występująca w [prawie Hooke'a](#) dla tzw. liniowych sprężyn, w których wartość siły sprężystości  $F$  jest proporcjonalna do wydłużenia (lub skrócenia)  $x$  sprężyny:  $F = k \cdot x$ . Jednostką stałej sprężystości jest  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$

(niuton na metr). Im większa jest stała sprężystości sprężyny, tym trudniej ją odkształcić, czyli rozciągnąć lub ścisnąć.

### **Prawo Hooke'a**

(ang.: *Hooke's law*) – prawo mechaniki, które głosi, że odkształcenie ciała pod wpływem działającej na nie siły jest proporcjonalne do tej siły.

# Symulacja interaktywna

---

## Przemiany energii kinetycznej i potencjalnej w ruchu drgającym

Symulacja interaktywna pozwala zbadać przemiany energii kinetycznej i potencjalnej oscylatora harmonicznego.

Po prawej stronie widzisz zależność energii potencjalnej od położenia  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$  i energii kinetycznej od prędkości  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ . Obie zależności są kwadratowe, więc ich wykresy mają postać paraboli. Punkty ślizgające się po parabolach wskazują odpowiednio aktualne położenie/energię potencjalną oraz prędkość/energię kinetyczną. Zwróć uwagę na cykliczną przemianę form energii oraz całkowitą energię oscylatora harmonicznego.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

### Polecenie 1

Uruchom symulację na poziomie podstawowym. Nastawiaj różne wartości amplitudy drgania o częstości 1 rad/s. Przekonaj się, jaki to ma wpływ na całkowitą energię układu drgającego.

Uruchom symulację dla wybranej amplitudy. Zatrzymuj ją w różnych fazach drgania. Odczytaj każdorazowo z wykresu chwilową wartość energii kinetycznej oraz potencjalnej i dodaj je do siebie. Przekonaj się, że ich suma jest zawsze jednakowa, gdy uwzględniysz dokładność odczytu.

### Polecenie 2




Przejdź do poziomu zaawansowanego. Nastawiaj różne wartości częstości. Przekonaj się, że zmiana częstości wpływa – przy ustalonej masie – na całkowitą energię drgań. Przekonaj się przy tym, że wpływ ten jest inny dla przebiegu zależności energii potencjalnej, a inny dla kinetycznej.

### **Polecenie 3**

Zatrzymaj drganie w fazie, w której energie potencjalna i kinetyczna będą miały możliwie jednakową wartość. Ile razy w ciągu okresu zdarza się taka sytuacja? Zbadaj hipotezę, że w tej fazie drgania bezwzględne wartości wychylenia oraz prędkości stanowią połowę maksymalnych wartości, osiągniętych przez te zmienne.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

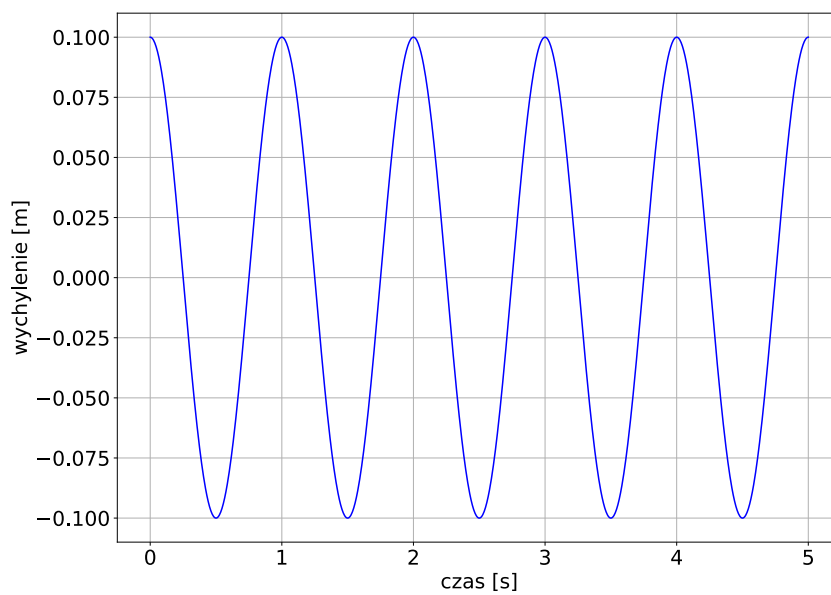
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2

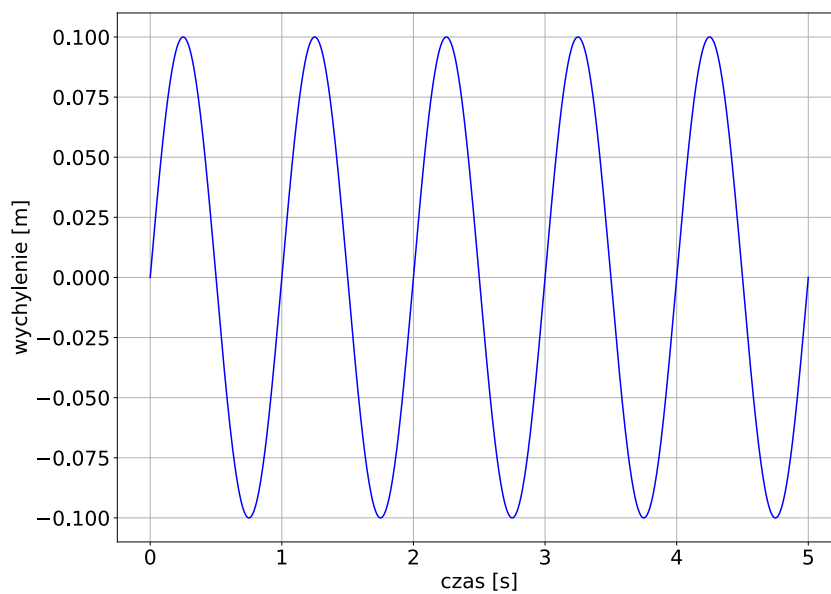


## Ćwiczenie 3



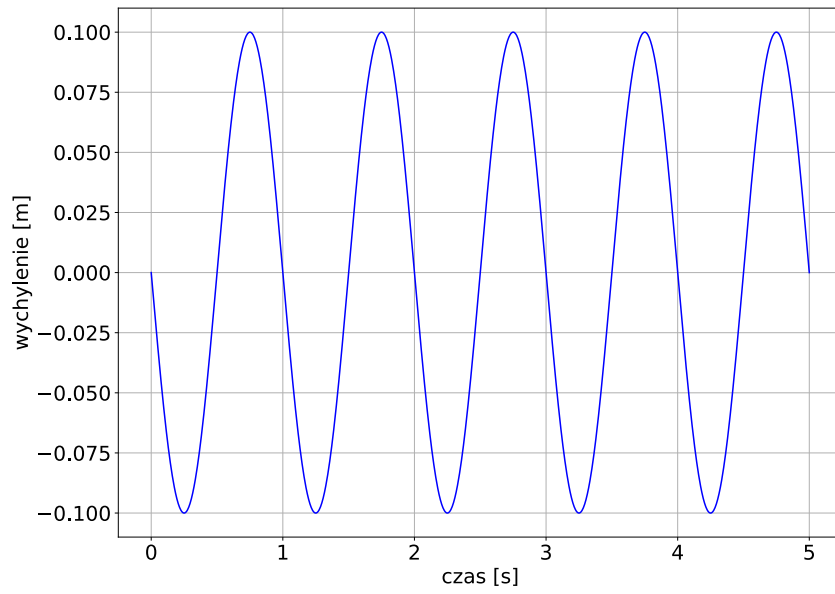
Rys. Wykres A

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



Rys. Wykres B

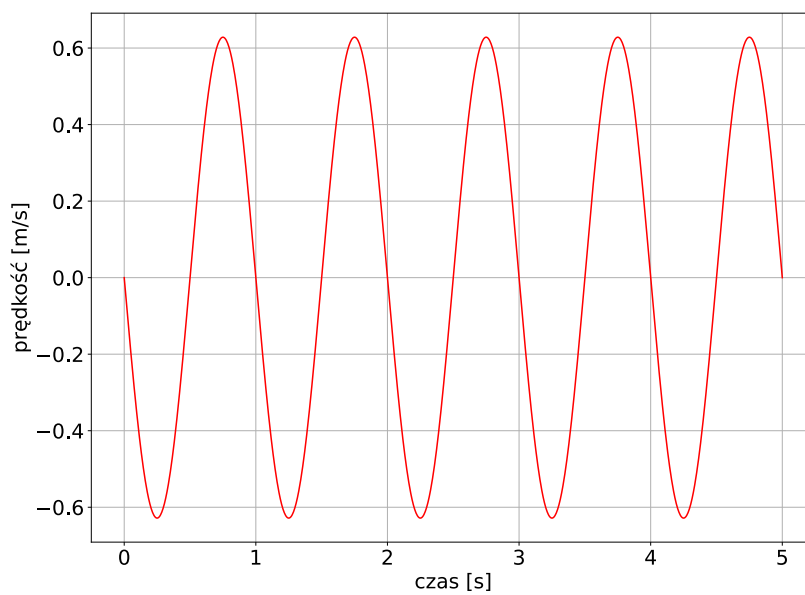
Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



Rys. Wykres C

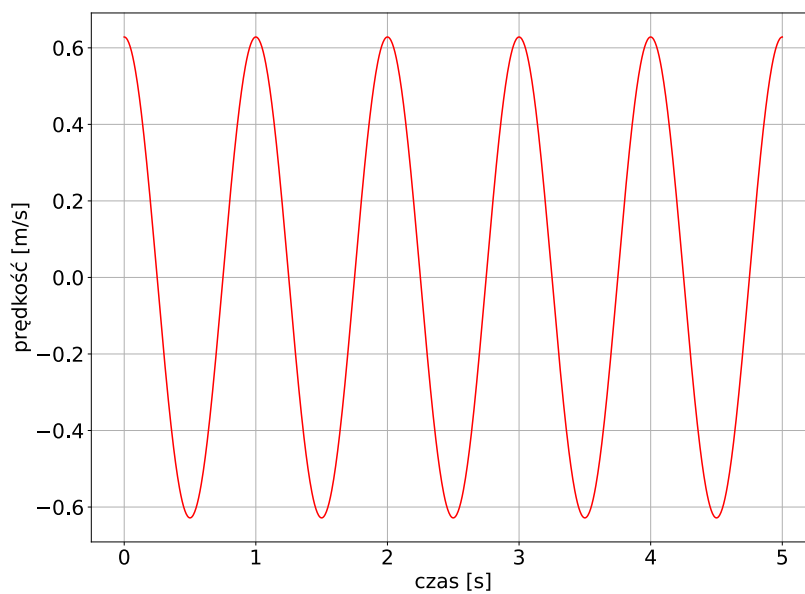
Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

## Ćwiczenie 4



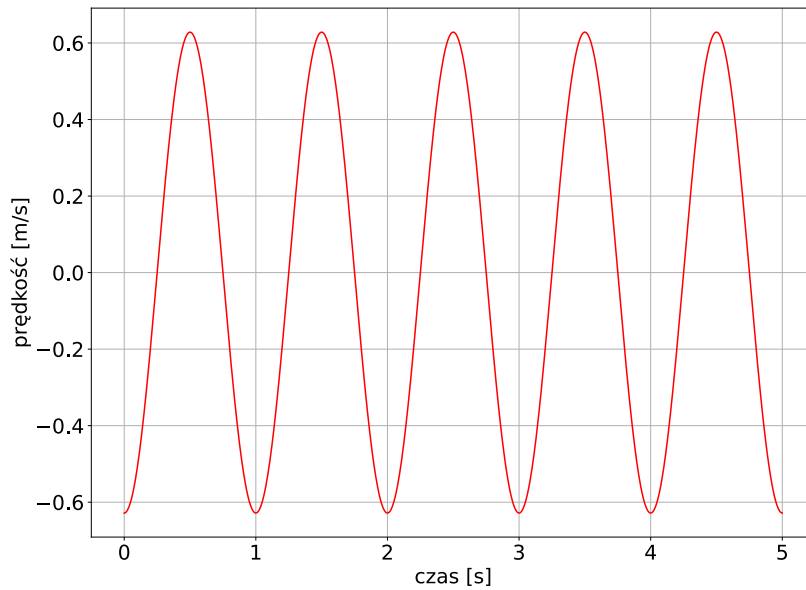
Rys. Wykres A

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



Rys. Wykres B

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



Rys. Wykres C

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

## Ćwiczenie 5



## Ćwiczenie 6



## Ćwiczenie 7



Oscylator harmoniczny w chwili  $t = 0$  ma maksymalną prędkość. Ile wyniesie stosunek energii kinetycznej do energii potencjalnej po upływie  $1/8$  okresu drgań? Uzasadnij odpowiedź.

## Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

<b>Imię i nazwisko autora:</b>	Tomasz Gradowski
<b>Przedmiot:</b>	fizyka
<b>Temat zajęć:</b>	<b>Energia drgań</b>
<b>Grupa docelowa:</b>	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony
<b>Podstawa programowa:</b>	<p><b>Cele kształcenia – wymagania ogólne</b></p> <p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p><b>Zakres podstawowy</b></p> <p><b>Treści nauczania – wymagania szczegółowe</b></p> <p>I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:</p> <p>7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach.</p> <p>IV. Drgania. Uczeń:</p> <p>3) analizuje przemiany energii w ruchu drgającym.</p> <p><b>Zakres rozszerzony</b></p> <p><b>Treści nauczania – wymagania szczegółowe</b></p> <p>I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:</p> <p>7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach.</p> <p>V. Drgania. Uczeń:</p> <p>6) oblicza energię potencjalną sprężystości i uwzględnia ją w analizie przemian energii.</p>

<b>Kształtowane kompetencje kluczowe:</b>	<b>Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,</li> <li>• kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,</li> <li>• kompetencje cyfrowe,</li> <li>• kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.</li> </ul>
<b>Cele operacyjne:</b>	<p>Uczeń:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. wyjaśnia, jak obliczyć energię kinetyczną i potencjalną oscylatora harmonicznego;</li> <li>2. omawia zasadę zachowania energii dla oscylatora harmonicznego;</li> <li>3. analizuje przemiany energii w ruchu drgającym;</li> <li>4. stosuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań.</li> </ol>
<b>Strategie nauczania:</b>	IBSE
<b>Metody nauczania:</b>	pogadanka ilustrowana doświadczeniem wstępnym, symulacja interaktywna
<b>Formy zajęć:</b>	praca w parach, praca indywidualna
<b>Środki dydaktyczne:</b>	symulacja interaktywna "Przemiany energii kinetycznej i potencjalnej w ruchu drgającym", zestaw zadań
<b>Materiały pomocnicze:</b>	masa na sprężynie lub areometr lub spławik i naczynie z wodą, e-materiały: „Prawo Hooke’a”, „Przykłady ruchu harmonicznego”, „Co to jest ruch harmoniczny?”
<b>PRZEBIEG LEKCJI</b>	
<b>Faza wprowadzająca:</b>	Uczniowie, w dyskusji zainicjowanej przez nauczyciela, przypominają podstawowe pojęcia związane z ruchem harmonicznym, takie jak amplituda, częstość kołowa, siła sprężystości i energia potencjalna sprężystości. Przypominają wykresy zależności położenia i prędkości od czasu w ruchu harmonicznym.
<b>Faza realizacyjna:</b>	

Nauczyciel, posługując się ciężarkiem na sprężynie, demonstruje związek pomiędzy maksymalną prędkością i amplitudą drgań.  
Nauczyciel prezentuje wykresy zależności energii kinetycznej i potencjalnej od czasu.  
Uczniowie zestawiają je z wykresami położenia i prędkości od czasu.  
Uczniowie zapoznają się z symulacją interaktywną dotyczącą przemian energii w ruchu drgającym.  
Uczniowie rozwiązują w dwuosobowych zespołach zadania 1-5 z zestawu ćwiczeń.  
Nauczyciel pełni rolę doradcy, obserwuje i kontroluje pracę uczniów.

**Faza podsumowująca:**

Nauczyciel dyskutuje z uczniami rozwiązania zadań. Poprzez analizę wypowiedzi uczniów nauczyciel określa, w jakim stopniu osiągnięte zostały wyznaczone cele.

**Praca domowa:**

Uczniowie utrwalają wiedzę przez rozwiązanie w domu zadań 6-8 z zestawu ćwiczeń oraz powtórne przeanalizowanie symulacji interaktywnej.

**Wskazówki  
metodyczne  
opisujące różne  
zastosowania danego  
multimedium**

Symulacja interaktywna może być też samodzielnie wykorzystana przez uczniów przed lekcją lub po lekcji do powtórzenia i utrwalenia wiadomości.