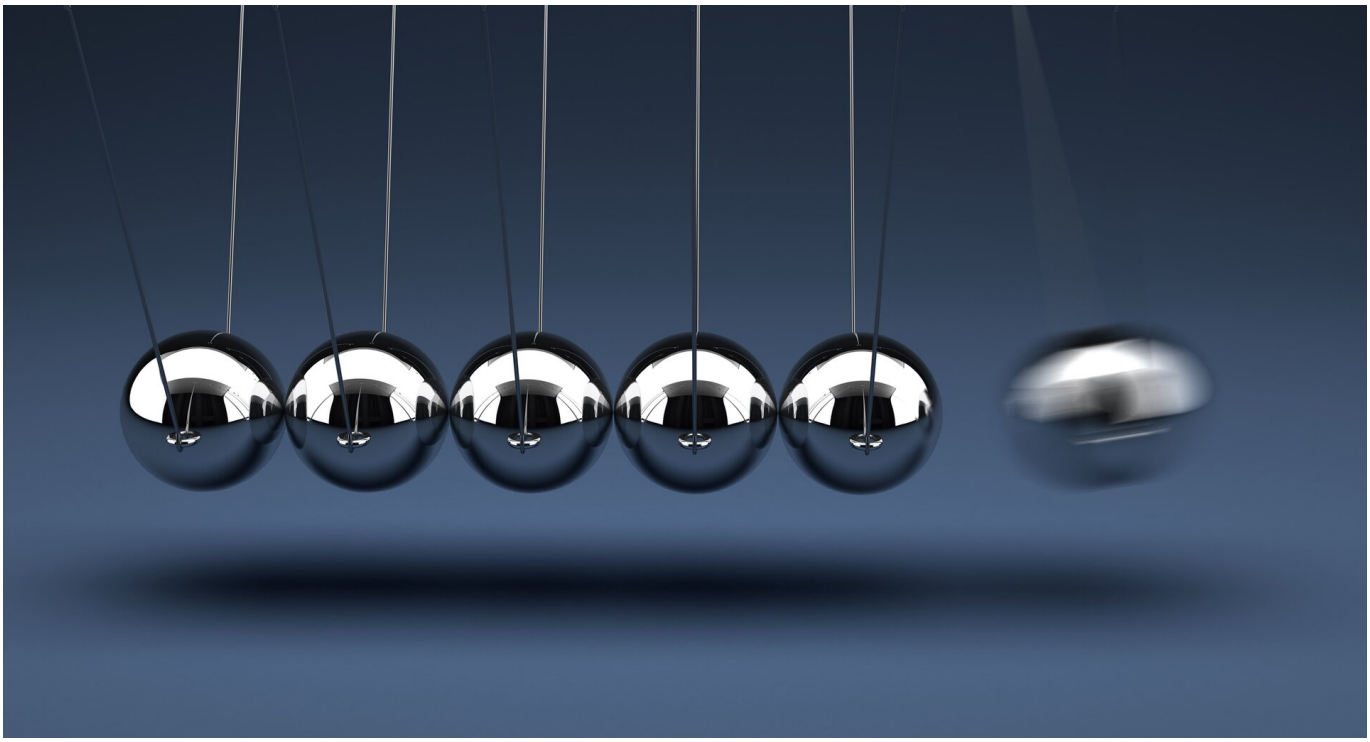
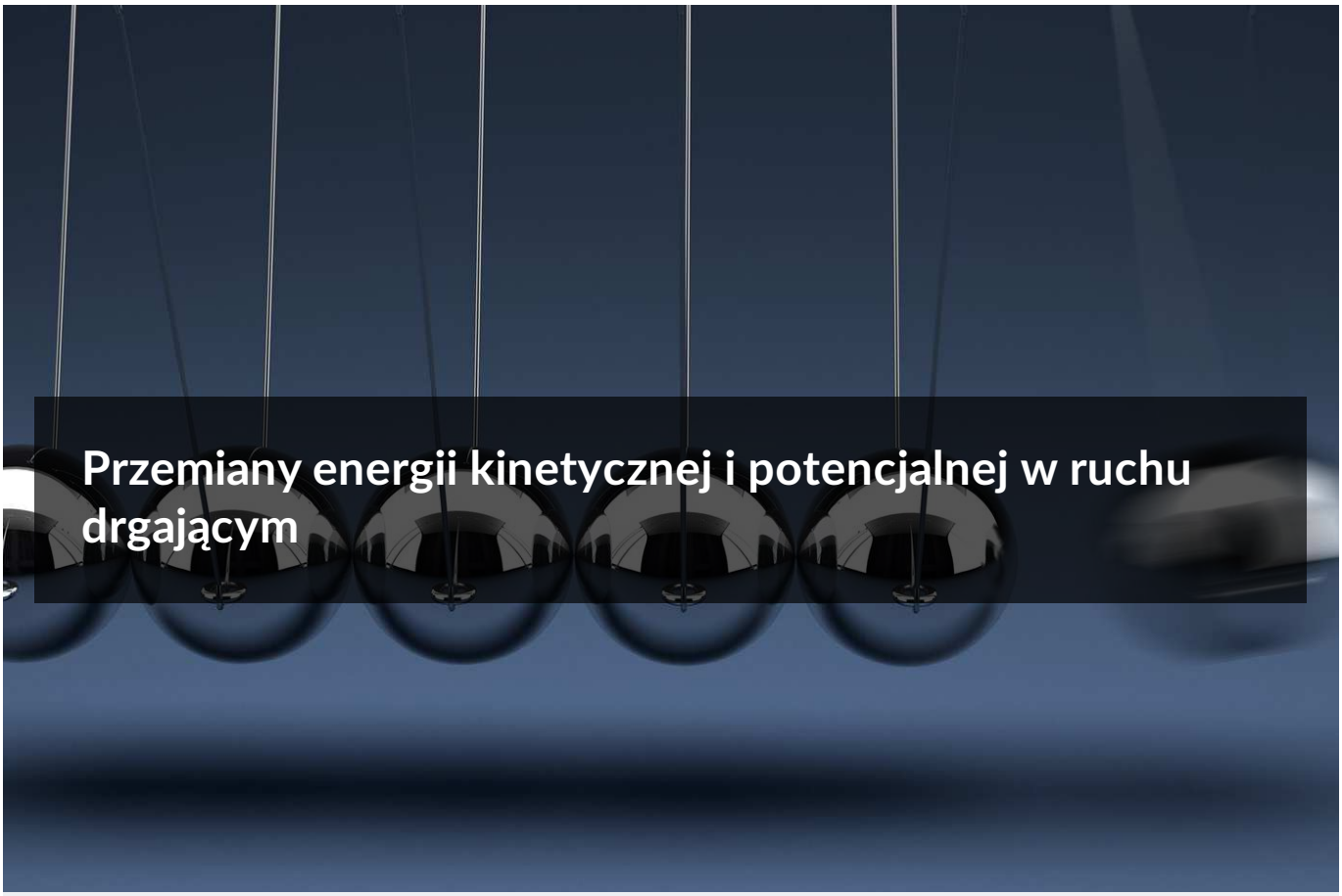


Przemiany energii kinetycznej i potencjalnej w ruchu drgającym

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: dostępny w internecie: https://www.istockphoto.com/pl/zdj%C4%99cie/ko%C5%82yska-newtona-gm465044128-59504348 [dostęp 2.07.2019], iStockphoto, tylko do użytku edukacyjnego na zpe.gov.pl.

Czy to nie ciekawe?

Układ wykonujący drgania harmoniczne, czyli oscylator harmoniczny, może zmagazynować energię. I, o ile nie występują w układzie siły oporu, takie jak tarcie czy lepkość, tak zmagazynowana energia nie ulegnie rozproszeniu. Będzie jedynie cyklicznie zmieniała swoją formę.

Rys. a. Siodełko rowerowe na sprężynach

Źródło: dostępny w internecie: https://pixabay.com/zh/photos/saddle-bike-sport-travel-5141605/ [dostęp 29.05.2022], domena publiczna.

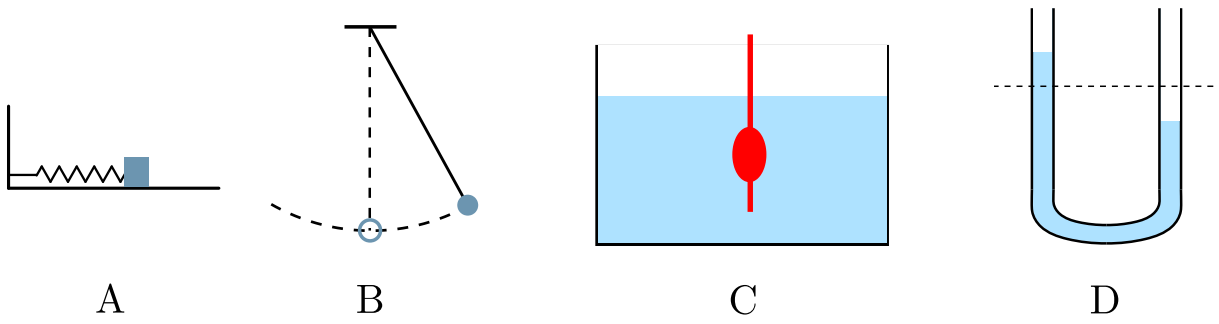
Twoje cele

- dowiesz się, jak obliczyć energię kinetyczną i potencjalną oscylatora harmonicznego,
- poznasz zasadę zachowania energii dla oscylatora harmonicznego,
- przeanalizujesz przemiany energii w ruchu drgającym,
- zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Układy, takie jak ciężarek przyczepiony na sprężynie, wahadło, spławik zanurzony w cieczy lub ciecz w U-kształtnej rurce, mają wspólną cechę. Wytrącone ze stanu równowagi zaczynają wykonywać drgania, czyli periodyczne oscylacje wokół położenia równowagi.



Rys. 1. Przykładowe układy drgające: A - klocek na sprężynie, B - wahadło, C - spławik zanurzony w wodzie, D - woda w U-rurce

Rozważmy układ prostego oscylatora harmonicznego. Jego położenie, a dokładniej odchylenie od punktu równowagi, opiszemy równaniem:

$$x(t) = A \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

gdzie A jest amplitudą, czyli maksymalną wartością wychylenia, ω to częstość kołowa drgań, od której zależy okres drgań oscylatora $T = \frac{2\pi}{\omega}$, a φ jest fazą początkową.

Współrzędną prędkości opisuje równanie:

$$v_x(t) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

Znajdźmy teraz wyrażenie opisujące energię kinetyczną i potencjalną takiego oscylatora.

Energia kinetyczna układu to energia ruchu, czyli zależna od jego prędkości: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Dla omawianego oscylatora otrzymujemy więc energię kinetyczną o postaci:

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2\left(\omega t + \varphi\right)$$

Energia potencjalna oscylatora harmonicznego jest funkcją kwadratową jego wychylenia z minimum w punkcie równowagi i ma postać $E_p = \frac{1}{2}kx^2$. Parametr k to współczynnik proporcjonalności siły harmonicznej do wychylenia, związany z częstością kołową ω i masą oscylatora wyrażeniem $k = m\omega^2$.

Wstawiając zależność $x(t)$ otrzymujemy:

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \left(\omega t + \varphi\right)$$

Korzystając ze związku $k = m\omega^2$ powyższe równanie przybiera postać:

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \left(\omega t + \varphi\right)$$

Częstość kołowa oscylatora zależy od rodzaju układu drgającego (Rys. 1.). Na przykład dla ciężarka na sprężynie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a współczynnik k jest nazywany jest współczynnikiem sprężystości lub stałą sprężystości sprężyny. W przypadku wahadła matematycznego $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, gdzie l to długość nici, a g - przyspieszenie ziemskie. Z kolei drgania słupa wody o całkowitej długości l w U-rurce zachodzą z częstością kołową $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$.

Obliczmy teraz **całkowitą energię oscylatora**, sumując energię kinetyczną i potencjalną:

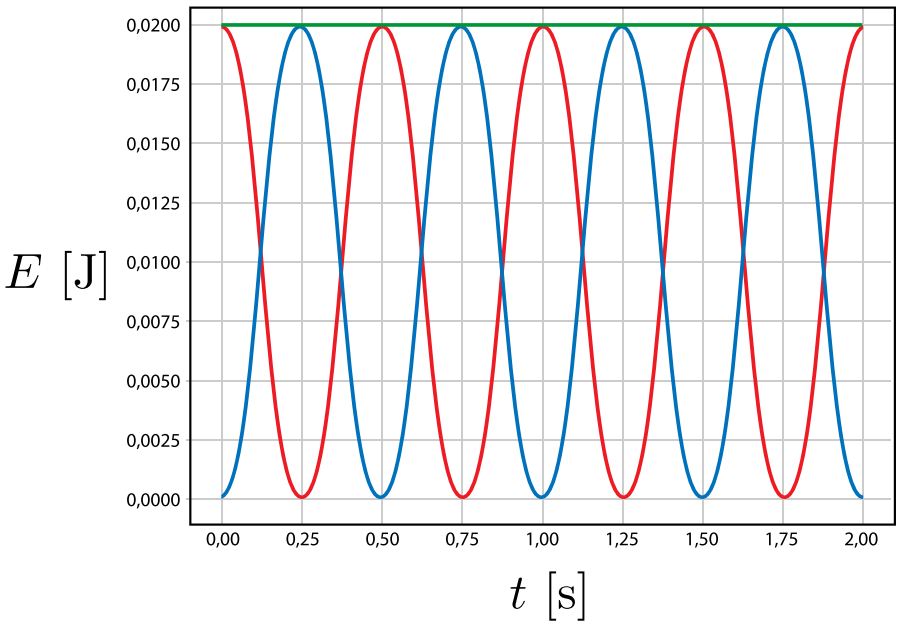
$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \left(\omega t + \varphi\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \left(\omega t + \varphi\right).$$

Po wyłączeniu kilku stałych wielkości przed nawias otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \left(\sin^2 \left(\omega t + \varphi\right) + \cos^2 \left(\omega t + \varphi\right)\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

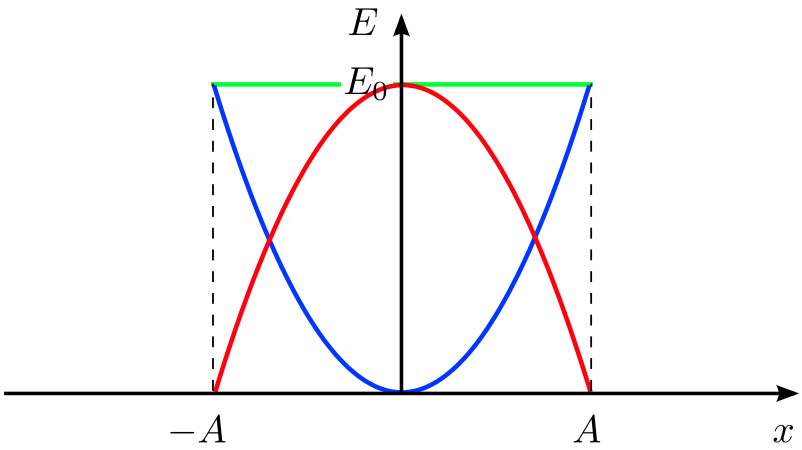
W ostatnim kroku skorzystaliśmy z „jedynki trygonometrycznej" i otrzymaliśmy stałą (czyli niezależną od czasu) wartość całkowitej energii. Całkowita energia mechaniczna oscylatora jest proporcjonalna do jego masy, kwadratu amplitudy i kwadratu częstości, która zależy od parametrów układu drgającego.

Przeanalizujmy na wykresie (Rys. 2.) zależność energii kinetycznej (krzywa czerwona) i potencjalnej (krzywa niebieska) od czasu.



Rys. 2. Zależność energii potencjalnej (niebieska krzywa), kinetycznej (czerwona krzywa) i całkowitej (zielona) od czasu ciężarka o masie m = 100 g wykonującego drgania o okresie 1 s i amplitudzie 10 cm

Oscylator w tym przykładzie w chwili początkowej przechodził przez położenie równowagi $x = 0$. Tak więc w chwili t = 0 energia potencjalna wynosi 0, natomiast energia kinetyczna ma wartość maksymalną. Energia kinetyczna i potencjalna są przesunięte w fazie o dokładnie 180 stopni (π radianów), a energia całkowita jest stała. Przemiany energii kinetycznej i potencjalnej można także przedstawić na wykresie zależności energii oscylatora od wychylenia z położenia równowagi (Rys. 3.).



Rys. 3. Zależność energii kinetycznej (czerwona krzywa), potencjalnej (niebieska krzywa) i całkowitej (zielona krzywa) oscylatora od położenia. Energia całkowita jest stała

Wniosek, jaki płynie z powyższych rozważań jest następujący: całkowita energia oscylatora jest stała, ulega cyklicznej zmianie formy z energii kinetycznej do potencjalnej. Za każdym razem, gdy układ przechodzi przez punkt równowagi, jego energia potencjalna jest zerowa, a całkowita energia układu ma postać energii kinetycznej. W momencie, gdy układ jest wychylony od położenia równowagi do punktu maksymalnego wychylenia, całkowita energia ma formę energii potencjalnej, a energia kinetyczna jest zerowa (Rys. 3.).

Słowniczek

Energia potencjalna sprężystości

(ang.: *elastic potential energy*) praca, jaką należy wykonać, by ścisnąć lub rozciągnąć sprężynę poczynając od stanu równowagi.

Stała sprężystości sprężyny

(ang.: *spring constant*) ozn. k – stała materiałowa występująca w prawie Hooke'a dla tzw. liniowych sprężyn, w których wartość siły sprężystości F jest proporcjonalna do wydłużenia (lub skrócenia) x sprężyny: $F = k \cdot x$. Jednostką stałej sprężystości jest N·m^{-1}

(niuton na metr). Im większa jest stała sprężystości sprężyny, tym trudniej ją odkształcić, czyli rozciągnąć lub ścisnąć.

Prawo Hooke'a

(ang.: *Hooke's law*) – prawo mechaniki, które głosi, że odkształcenie ciała pod wpływem działającej na nie siły jest proporcjonalne do tej siły.

Symulacja interaktywna

Przemiany energii kinetycznej i potencjalnej w ruchu drgającym

Symulacja interaktywna pozwala zbadać przemiany energii kinetycznej i potencjalnej oscylatora harmonicznego.

Po prawej stronie widzisz zależność energii potencjalnej od położenia $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ i energii kinetycznej od prędkości $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Obie zależności są kwadratowe, więc ich wykresy mają postać paraboli. Punkty ślizgające się po parabolach wskazują odpowiednio aktualne położenie/energię potencjalną oraz prędkość/energię kinetyczną. Zwróć uwagę na cykliczną przemianę form energii oraz całkowitą energię oscylatora harmonicznego.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Polecenie 1
Uruchom symulację na poziomie podstawowym. Nastawiaj różne wartości amplitudy drgania o częstości 1 rad/s. Przekonaj się, jaki to ma wpływ na całkowitą energię układu drgającego.

Uruchom symulację dla wybranej amplitudy. Zatrzymuj ją w różnych fazach drgania. Odczytaj każdorazowo z wykresu chwilową wartość energii kinetycznej oraz potencjalnej i dodaj je do siebie. Przekonaj się, że ich suma jest zawsze jednakowa, gdy uwzględnisz dokładność odczytu.

Polecenie 2
Przejdź do poziomu zaawansowanego. Nastawiaj różne wartości częstości. Przekonaj się, że zmiana częstości wpływa – przy ustalonej masie – na całkowitą energię drgań. Przekonaj się przy tym, że wpływ ten jest inny dla przebiegu zależności energii potencjalnej, a inny dla kinetycznej.

Polecenie 3

Zatrzymaj drganie w fazie, w której energie potencjalna i kinetyczna będą miały możliwie jednakową wartość. Ile razy w ciągu okresu zdarza się taka sytuacja? Zbadaj hipotezę, że w tej fazie drgania bezwzględne wartości wychylenia oraz prędkości stanowią połowę maksymalnych wartości, osiąganych przez te zmienne.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wybierz prawidłową odpowiedź.

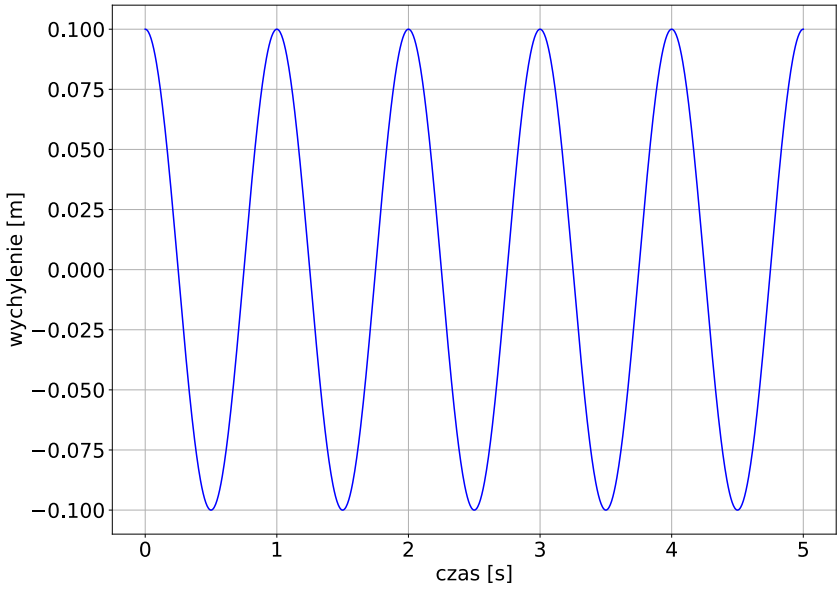
Energia kinetyczna ☐ / potencjalna ☐ przybiera maksymalną wartość, gdy układ wykonujący drgania przechodzi przez punkt równowagi.

Ćwiczenie 2

Wybierz prawidłową odpowiedź:

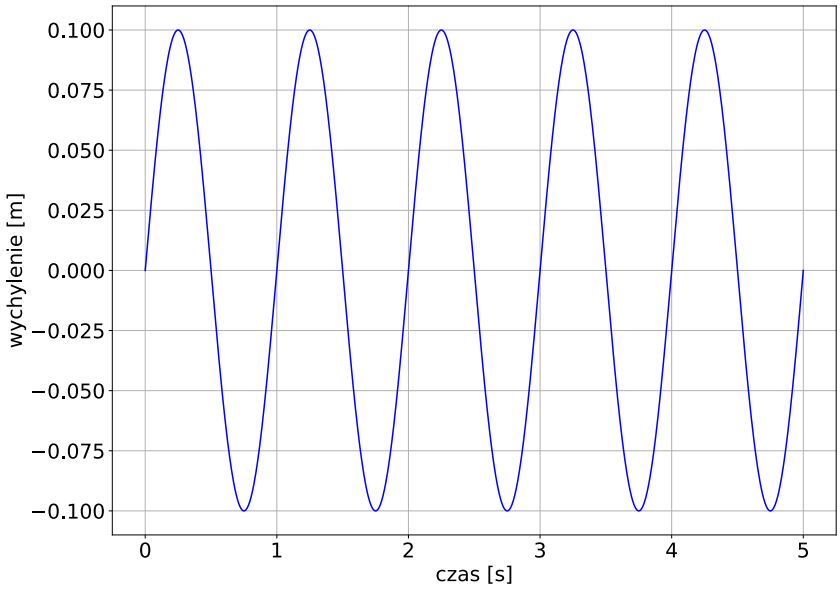
Energia kinetyczna ☐ / potencjalna ☐ przybiera maksymalną wartość, gdy układ wykonujący drgania osiąga maksymalne wychylenie.

Ćwiczenie 3



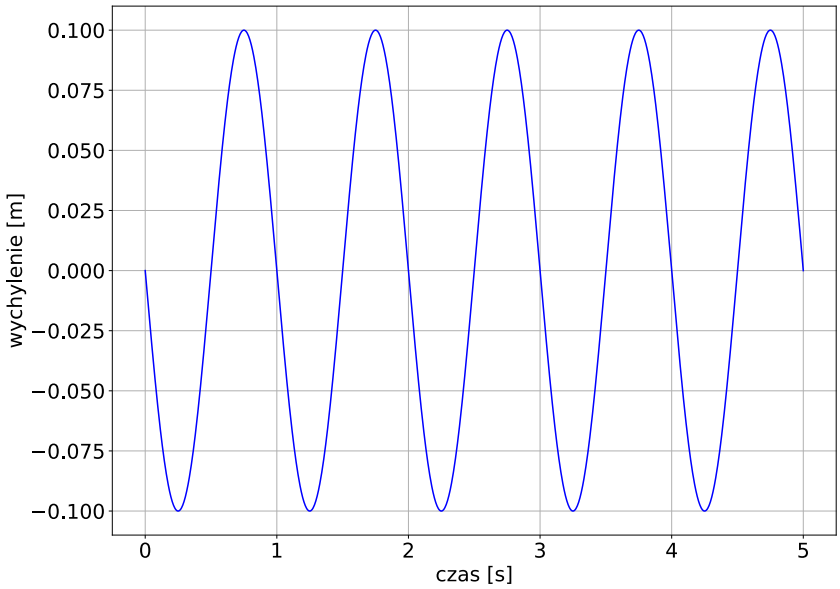
Rys. Wykres A

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



Rys. Wykres B

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



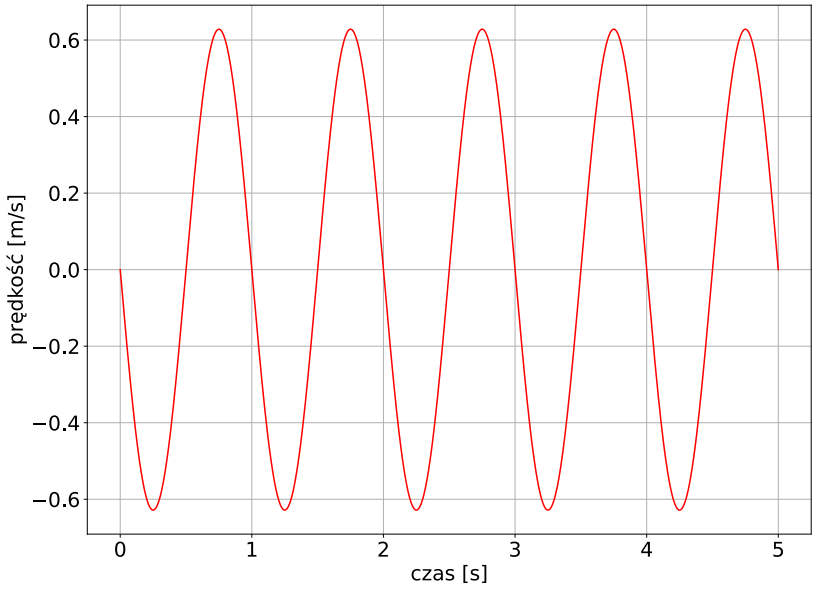
Rys. Wykres C

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Powyżej widzisz wykresy przedstawiające zależność wychylenia od czasu trzech oscylatorów harmonicznych o tych samych częstościach, lecz różnych fazach początkowych. Które 2 układy będą miały identyczną zależność energii kinetycznej od czasu?

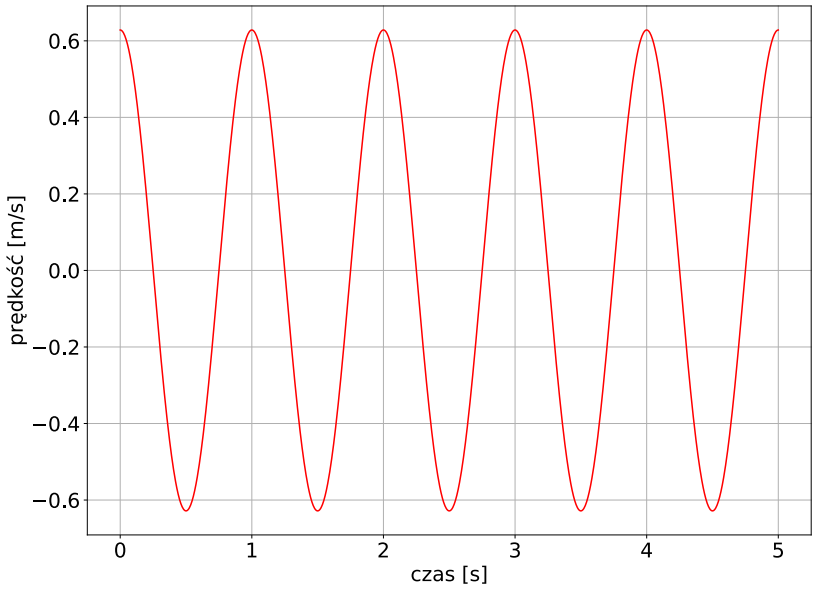
- B i C
- A i B
- A i C

Ćwiczenie 4



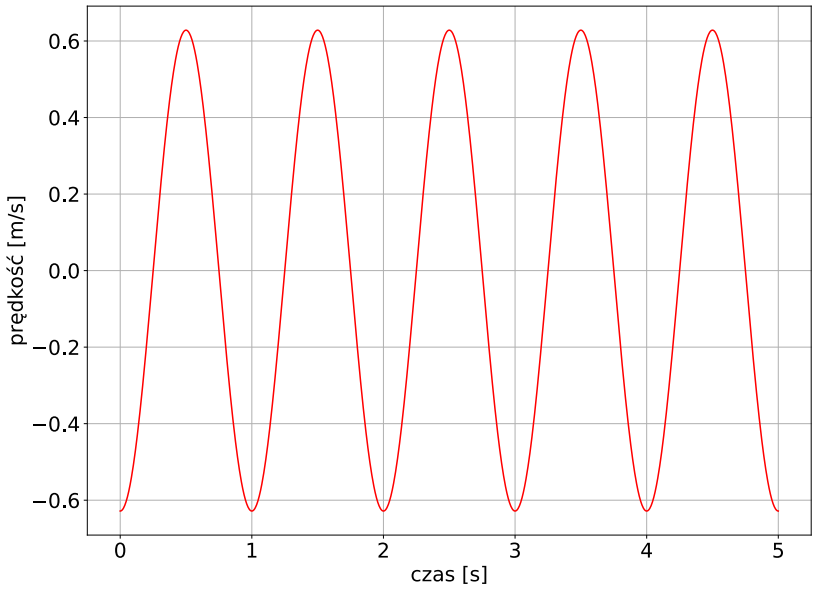
Rys. Wykres A

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



Rys. Wykres B

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.



Rys. Wykres C

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Powyżej widzisz wykresy przedstawiające zależność prędkości od czasu trzech oscylatorów harmonicznych o tych samych częstościach, lecz różnych fazach początkowych. Które 2 układy będą miały identyczną zależność energii potencjalnej od czasu?

- B i C
- A i B
- A i C

Ćwiczenie 5

Ciężarek na sprężynie wykonuje drgania harmoniczne. Ile wynosi stosunek energii kinetycznej do energii potencjalnej w chwili, gdy wychylenie równe jest połowie amplitudy.

Odp.

Ćwiczenie 6

Układ wykonuje drgania opisane równaniem:

$$x(t) = \sin\left(\frac{2}{3}\frac{\pi t}{\text{sekunda}} + \pi\right)$$

Rozważ stan układu po upływie 22,5 sekundy. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

- energia kinetyczna jest zerowa
- żadne z powyższych
- energia potencjalna jest zerowa

Ćwiczenie 7

Oscylator harmoniczny w chwili t = 0 ma maksymalną prędkość. Ile wyniesie stosunek energii kinetycznej do energii potencjalnej po upływie 1/8 okresu drgań? Uzasadnij odpowiedź.

Odp.

Ćwiczenie 8

Oscylator wykonuje drgania o okresie T. Co jaki czas energia kinetyczna oscylatora będzie maksymalna?

- $T/2$
- T
- $2T$

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Tomasz Gradowski
Przedmiot:	fizyka
Temat zajęć:	**Energia drgań**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony
Podstawa programowa:	**Cele kształcenia – wymagania ogólne** I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. **Zakres podstawowy** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. IV. Drgania. Uczeń: 3) analizuje przemiany energii w ruchu drgającym. **Zakres rozszerzony** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. V. Drgania. Uczeń: 6) oblicza energię potencjalną sprężystości i uwzględnia ją w analizie przemian energii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:	**Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:** • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: 1. wyjaśnia, jak obliczyć energię kinetyczną i potencjalną oscylatora harmonicznego; 2. omawia zasadę zachowania energii dla oscylatora harmonicznego; 3. analizuje przemiany energii w ruchu drgającym; 4. stosuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań.
Strategie nauczania:	IBSE
Metody nauczania:	pogadanka ilustrowana doświadczeniem wstępnym, symulacja interaktywna
Formy zajęć:	praca w parach, praca indywidualna
Środki dydaktyczne:	symulacja interaktywna “Przemiany energii kinetycznej i potencjalnej w ruchu drgającym”, zestaw zadań
Materiały pomocnicze:	masa na sprężynie lub areometr lub spławik i naczynie z wodą, e-materiały: „Prawo Hooke’a”, „Przykłady ruchu harmonicznego”, „Co to jest ruch harmoniczny?”
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Uczniowie, w dyskusji zainicjonowanej przez nauczyciela, przypominają podstawowe pojęcia związane z ruchem harmonicznym, takie jak amplituda, częstość kołowa, siła sprężystości i energia potencjalna sprężystości. Przypominają wykresy zależności położenia i prędkości od czasu w ruchu harmonicznym.	
Faza realizacyjna:	

Nauczyciel, posługując się ciężarkiem na sprężynie, demonstruje związek pomiędzy maksymalną prędkością i amplitudą drgań. Nauczyciel prezentuje wykresy zależności energii kinetycznej i potencjalnej od czasu. Uczniowie zestawiają je z wykresami położenia i prędkości od czasu. Uczniowie zapoznają się z symulacją interaktywną dotyczącą przemian energii w ruchu drgającym. Uczniowie rozwiązują w dwuosobowych zespołach zadania 1-5 z zestawu ćwiczeń. Nauczyciel pełni rolę doradcy, obserwuje i kontroluje pracę uczniów.	
Faza podsumowująca:	
Nauczyciel dyskutuje z uczniami rozwiązania zadań. Poprzez analizę wypowiedzi uczniów nauczyciel określa, w jakim stopniu osiągnięte zostały wyznaczone cele.	
Praca domowa:	
Uczniowie utrwalają wiedzę przez rozwiązanie w domu zadań 6-8 z zestawu ćwiczeń oraz powtórne przeanalizowanie symulacji interaktywnej.	
Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium	Symulacja interaktywna może być też samodzielnie wykorzystana przez uczniów przed lekcją lub po lekcji do powtórzenia i utrwalenia wiadomości.