



Równoległość wykresów funkcji liniowych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równoległość wykresów funkcji liniowych

Źródło: Maksym Tymchyk, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Dwie proste na płaszczyźnie są równoległe, gdy się pokrywają lub nie przecinają się. Identycznie jest z wykresami funkcji liniowych. W materiale omówimy warunek równoległości prostych, które są wykresami funkcji liniowych. Opierając się na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Określisz warunek, jaki muszą spełniać wzory funkcji liniowych, aby proste, będące wykresami tych funkcji były równoległe.
- Wyznaczysz wartości parametrów we wzorach funkcji liniowych, dla których proste, będące wykresami tych funkcji są równoległe.
- Zastosujesz warunek równoległości prostych, będących wykresami funkcji liniowych do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Już wiesz

Funkcję określoną wzorem

$$f(x) = ax + b,$$

gdzie:

$a, b \in \mathbb{R}$, nazywamy funkcją liniową.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta.

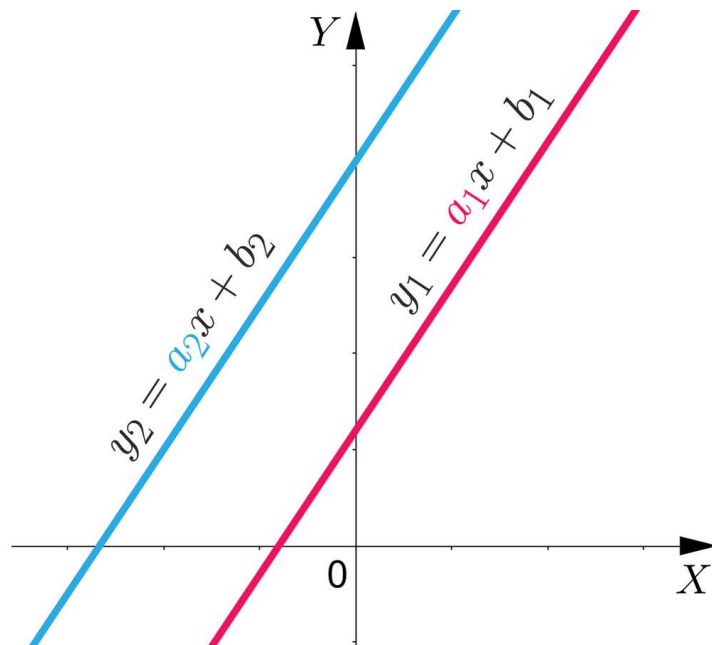
Liczbę a występującą we wzorze funkcji liniowej nazywamy współczynnikiem kierunkowym, liczbę b wyrazem wolnym.

Twierdzenie: równoległość prostych, będących wykresami funkcji liniowych

Proste, będące wykresami funkcji liniowych określonych wzorami $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $f(x) = a_2x + b_2$ są równoległe, gdy zachodzi warunek:

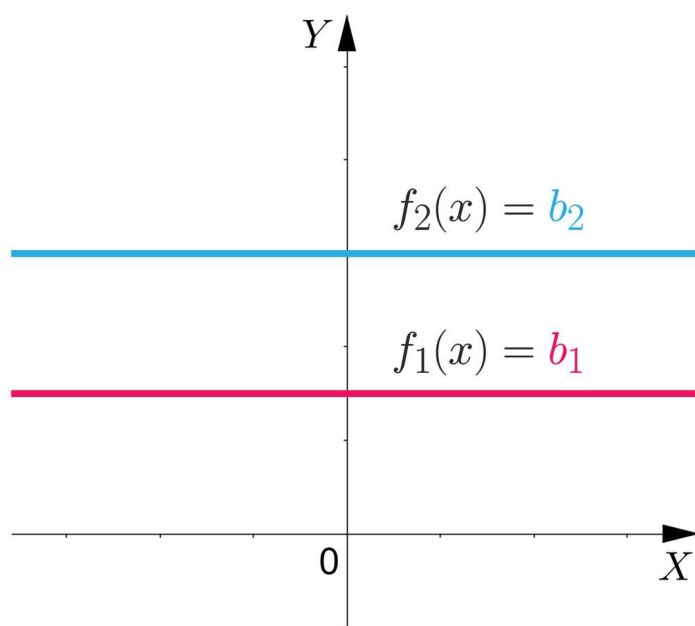
$$a_1 = a_2.$$

Powyższe twierdzenie jest równoważne temu, że proste opisane równaniami $y_1 = a_1 \cdot x + b_1$ oraz $y_2 = a_2 \cdot x + b_2$, będące wykresami funkcji liniowych, są równoległe, gdy mają ten sam współczynnik kierunkowy a .



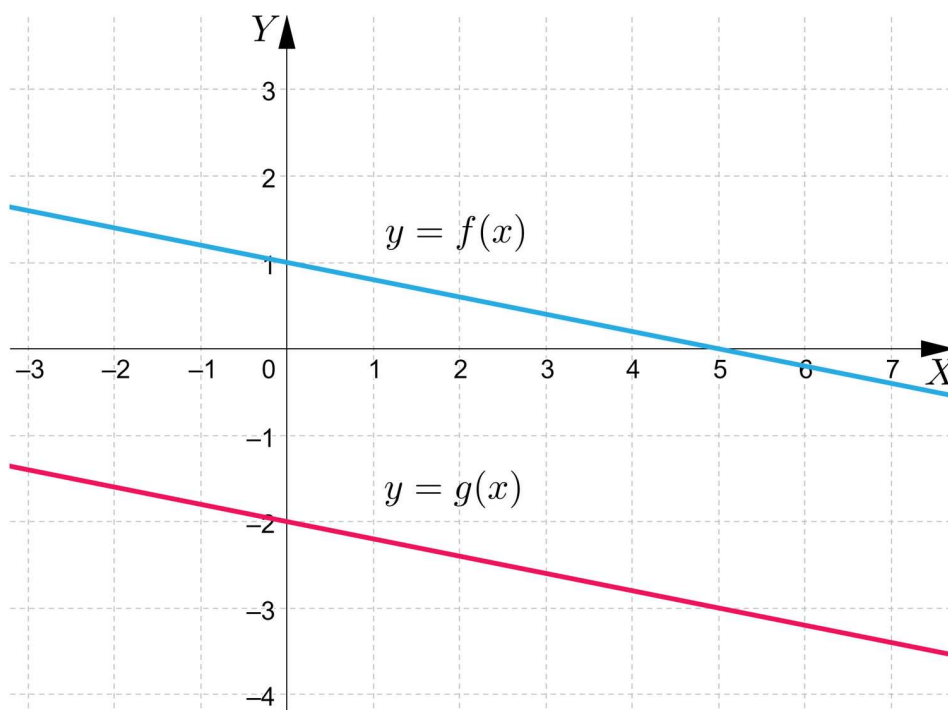
Ważne!

Proste, będące wykresami funkcji liniowych określonych wzorami $f_1(x) = b_1$ oraz $f_2(x) = b_2$, gdzie $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ są zawsze **prostymi równoległymi**.



Przykład 1

Na rysunku przedstawiono proste równoległe, będące wykresami funkcji liniowych. Wyznamy wzory tych funkcji.



Rozwiązanie

Niech $f(x) = ax + b$.

Do wykresu funkcji należą punkty o współrzędnych $(5, 0)$ i $(0, 1)$, zatem do wyznaczenia wartości współczynników a i b rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 5 + b \\ 1 = a \cdot 0 + b \end{cases}$$

Wobec tego $a = -\frac{1}{5}$ oraz $b = 1$. Funkcja

g jest określona wzorem $f(x) = -\frac{1}{5}x + 1$.

Niech $g(x) = ax + b_1$.

Proste, będące wykresami funkcji f i g są równoległe, zatem $a = -\frac{1}{5}$.

Wykres funkcji g przecina oś rzędnych w punkcie $(0, -2)$, zatem $b_1 = -2$.

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = -\frac{1}{5}x - 2$.

Przykład 2

Dane są funkcje liniowe określone wzorami: $f_1(x) = 0, 4x - 2$, $f_2(x) = -\sqrt{2}x - 2$, $f_3(x) = -\frac{2}{\sqrt{2}}x + 3$, $f_4(x) = -x$, $f_5(x) = -x + 8$, $f_6(x) = \frac{2}{5}x - 3$.

Wypiszemy pary wzorów funkcji liniowych, których wykresy są prostymi równoległymi.

Rozwiązanie

Pary wzorów funkcji liniowych, których wykresy są prostymi równoległymi: f_1 i f_6 , f_2 i f_3 , f_4 i f_5 .

Przykład 3

Określimy, dla jakiej wartości parametru m proste, będące wykresami funkcji liniowych zadanych wzorami $f(x) = (3m - 2)x + 5$ oraz $g(x) = (-m + 3)x + 1$ są równoległe.

Rozwiązanie

Proste, będące wykresami funkcji liniowych są równoległe, gdy współczynniki kierunkowe a we wzorach tych funkcji są takie same.

Zatem do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy równanie:

$$3m - 2 = -m + 3, \text{ wobec tego } m = \frac{5}{4}.$$

Przykład 4

Wyznamy wzór funkcji liniowej g , jeżeli prosta, będąca wykresem tej funkcji jest równoległa do prostej, będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$ oraz do wykresu funkcji g należy punkt o współrzędnych $(1, \frac{2}{3})$.

Rozwiązanie

Oznaczmy funkcję g wzorem $g(x) = ax + b$.

Ponieważ proste, będące wykresami funkcji f i g są równoległe, zatem $a = \frac{1}{4}$.

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = \frac{1}{4}x + b$.

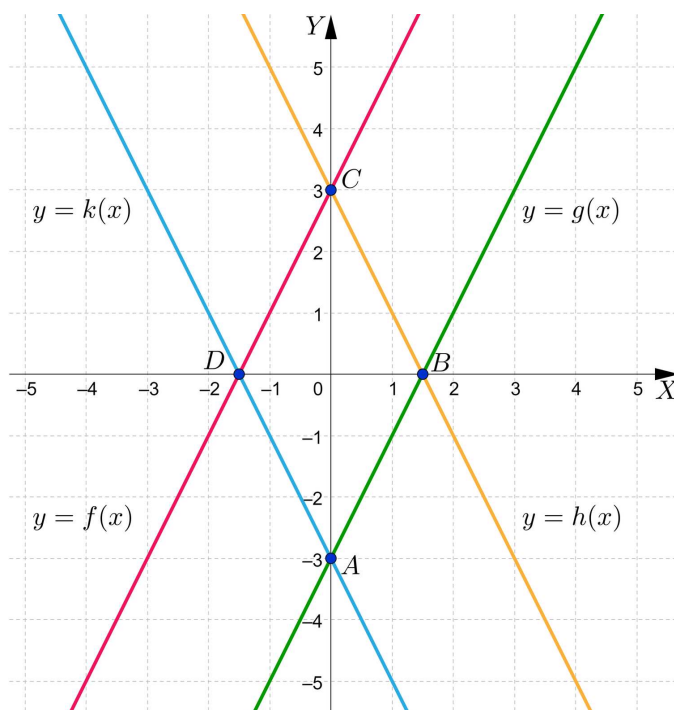
Ponieważ punkt o współrzędnych $(1, \frac{2}{3})$ należy do wykresu funkcji g , zatem do wyznaczenia wartości b rozwiązujemy równanie:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} \cdot 1 + b, \text{ wobec tego } b = \frac{5}{12}.$$

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$.

Przykład 5

Proste, będące wykresami funkcji f, g, h, k po przecięciu w punktach A, B, C i D utworzyły romb $ABCD$, jak na poniższym rysunku.



Wyznamy wzory tych funkcji.

Rozwiązanie

Wiemy, że proste, będące wykresami funkcji utworzyły romb. Mamy stąd dwie pary prostych równoległych, będących wykresami funkcji liniowych: f i g oraz h i k .

Wyznamy wzór funkcji f .

Niech $f(x) = ax + b$. Do wykresu tej funkcji należą punkty o współrzędnych $(0, 3)$ i $(1, 5)$.

Zatem do wyznaczenia wartości a i b rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a \cdot 1 + b \end{cases}$$

Wobec tego $a = 2$ i $b = 3$.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x + 3$.

Wyznamy wzór funkcji g .

Ponieważ prosta, będąca wykresem funkcji f jest równoległa do prostej, będącej wykresem funkcji g , to $a = 2$.

Zatem $g(x) = 2x + b$.

Z wykresu funkcji możemy odczytać, że należy do niego punkt o współrzędnych $(3, 3)$, wobec tego do wyznaczenia wartości b rozwiązujemy równanie:

$$3 = 2 \cdot 3 + b, \text{ zatem } b = -3.$$

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = 2x - 3$.

Wyznamy wzór funkcji h .

Niech $h(x) = ax + b$.

Do wykresu tej funkcji należą punkty o współrzędnych $(0, 3)$ i $(-1, 5)$.

Zatem do wyznaczenia wartości a i b rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a \cdot (-1) + b \end{cases}$$

Wobec tego $a = -2$ oraz $b = 3$.

Funkcja h jest określona wzorem $h(x) = -2x + 3$.

Wyznamy wzór funkcji k .

Niech $k(x) = ax + b$.

Ponieważ prosta, będąca wykresem funkcji f jest równoległa do prostej, będącej wykresem funkcji g , to $a = -2$.

Zatem $k(x) = -2x + b$.

Z wykresu funkcji możemy odczytać, że należy do niego punkt o współrzędnych $(-3, 3)$, zatem do wyznaczenia wartości b rozwiązujemy równanie:

$3 = (-2) \cdot (-3) + b$, wobec tego $b = -3$.

Funkcja k wyraża się wzorem $k(x) = -2x - 3$.

Słownik

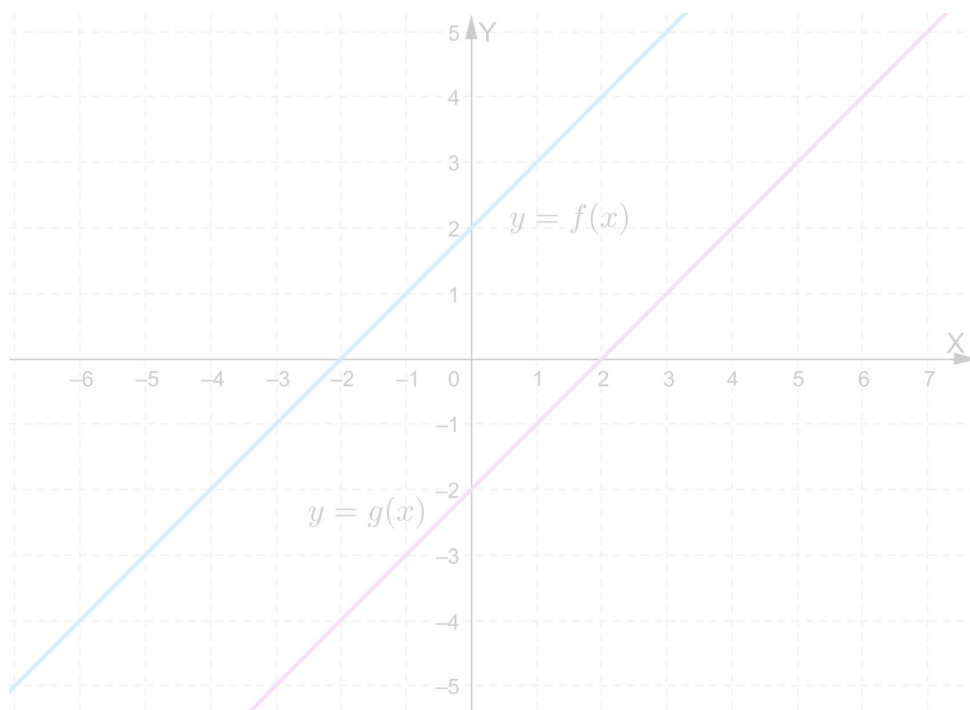
proste równoległe

wykresy funkcji liniowych o takim samym współczynniku kierunkowym

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet, a następnie zwróć uwagę na wartości współczynników we wzorze funkcji liniowej oraz położenie prostych, które są wykresami tych funkcji.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D157zm2k0>

Polecenie 2

Dane są wzory funkcji liniowych f i g . Wstaw takie liczby, aby proste, będące wykresami tych funkcji były równoległe.

a) $f(x) = 0,4x - 2$ i $g(x) = \boxed{} \cdot x + 3$

b) $f(x) = 2,5x - 1$ i $g(x) = \boxed{} \cdot x + 4$

c) $f(x) = -3x + 5$ i $g(x) = \boxed{} \cdot x - 5$

d) $f(x) = 3x - 8$ i $g(x) = \boxed{} \cdot x + 4$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Proste, będące wykresami funkcji liniowych określonych wzorami $f(x) = mx + 1$ oraz $f(x) = -mx + 2$:

☐ nie są równoległe.

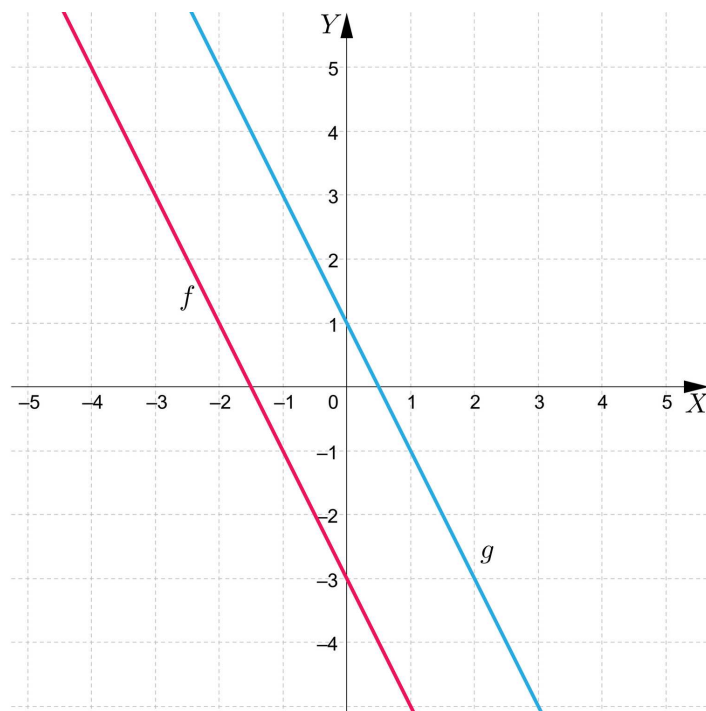
☐ są równoległe, gdy $m = 1$.

☐ są równoległe, gdy $m = 0$.

Ćwiczenie 2



Zapoznaj się z poniższym rysunkiem.



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Proste, przedstawione na rysunku, będące wykresami funkcji liniowych nie są równoległe.

☐

Proste, przedstawione na rysunku, będące wykresami funkcji liniowych są równoległe.

☐

Wartość współczynnika kierunkowego we wzorze każdej z tych funkcji wynosi (-2) .

☐

Wartość współczynnika kierunkowego we wzorze każdej z tych funkcji wynosi $(-\frac{1}{2})$.

Ćwiczenie 3



Połącz w pary wzory funkcji liniowych, których wykresy są prostymi równoległymi.

$$f(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1$$

$$g(x) = -\frac{7}{2}x + 1$$

$$f(x) = 0,125x + 2$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}x - 3$$

$$f(x) = -3$$

$$g(x) = 0$$

$$f(x) = -3,5x + 1$$

$$g(x) = \frac{1}{8}x - 5$$

Ćwiczenie 4



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Pary wzorów funkcji, których wykresy są prostymi równoległymi:

$$f(x) = -2x + 2 \text{ i } g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$f(x) = 0,6x + 1 \text{ i } g(x) = \frac{3}{5}x - 2$$

Pary wzorów funkcji, których wykresy nie są prostymi równoległymi:

$$f(x) = -4 \text{ i } g(x) = 4$$

$$f(x) = -3 \text{ i } g(x) = -3x$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3 \text{ i } g(x) = \sqrt{3}x - 3$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}x - 2 \text{ i } g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}x + 3$$

Ćwiczenie 5



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli proste, będące wykresami funkcji liniowych określonych wzorami

$f(x) = (-m - 1)x + 2$ oraz $g(x) = (m + 3)x - 1$ są równoległe, to $m =$.

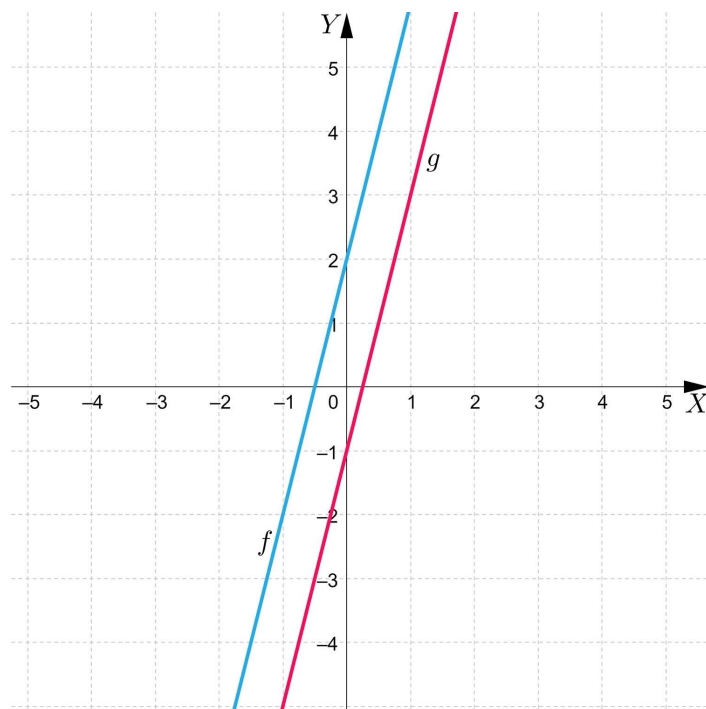
Jeżeli proste, będące wykresami funkcji liniowych określonych wzorami $f(x) = \frac{1}{2}mx$ oraz $g(x) = -2x + 2$ są równoległe, to $m =$.

Jeżeli proste, będące wykresami funkcji liniowych określonych wzorami $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1$ oraz $g(x) = \sqrt{2}mx + 3$ są równoległe, to $m =$.

Ćwiczenie 6



Zapoznaj się z poniższym rysunkiem.



Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

Na rysunku przedstawiono proste równoległe, będące wykresami funkcji liniowych określonych wzorami $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$. Wówczas:

$$a_1 = \boxed{}$$

$$b_1 = \boxed{}$$

$$a_2 = \boxed{}$$

$$b_2 = \boxed{}$$

Ćwiczenie 7



Wyznacz wzór funkcji liniowej g , jeżeli wiadomo, że do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(3, -4)$ oraz prosta, będąca wykresem tej funkcji jest równoległa do prostej, będącej wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = -3x + 2$.

Ćwiczenie 8



Określ, dla jakiej wartości parametru m proste, będące wykresami funkcji liniowych zadanych wzorami $f(x) = \left(\frac{1}{3}m - \frac{1}{9}\right)x + 3$ oraz $g(x) = \left(-m - \frac{1}{3}\right)x + 2$ są równoległe.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równoległość wykresów funkcji liniowych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa warunek, jaki muszą spełniać wzory funkcji liniowych, aby proste, będące ich wykresami były równoległe;
- wskazuje na podstawie wzorów funkcji liniowych te, których wykresy są prostymi równoległymi;
- wyznacza wartości parametrów we wzorach funkcji liniowych, dla których proste, będące wykresami tych funkcji są równoległe;
- stosuje warunek równoległości prostych, będących wykresami funkcji liniowych do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- metoda krokodyla;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Równoległość wykresów funkcji liniowych”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 4-osobowych grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Aplet”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 w sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8 w sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Równoległość wykresów funkcji liniowych”).

Materiały pomocnicze:

- [Proste równoległe, proste prostopadłe.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Aplet” można wykorzystać jako powtórzenie wiadomości w zakresie badania równoległości wykresów funkcji liniowych lub do wyznaczania liczby miejsc zerowych funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$, w zależności od wartości współczynników a i b .