Równanie kwadratowe

Obliczanie długości boków prostokąta przy podanej zależności pomiędzy długościami boków. Sprowadzanie treści zadania do zapisu w postaci równania kwadratowego. Obliczanie długości boków trójkąta przy podanym polu powierzchni. Wyznaczanie współrzędnych punktów wspólnych prostej i paraboli.

Twierdzenie o liczbie rozwiązań równania kwadratowego. Trzy możliwości wyniku przy rozwiązywaniu równania kwadratowego. Przykłady rozwiązań równań kwadratowych.

Rozwiązywanie równań kwadratowych. Wskazywanie liczby rozwiązań. Zasób zawiera zadania interaktywne.

Zapisywanie treści zadania w postaci równania kwadratowego. Rozwiązywanie równań kwadratowych. Zasób zawiera zadania interaktywne.

Zapisywanie treści zadania tekstowego w postaci równania kwadratowego. Rozwiązywanie równań kwadratowych. Zasób zawiera zadania otwarte z rozwiązaniami i zadania interaktywne.

Zapisywanie treści zadania w postaci równania kwadratowego. Rozwiązywanie równań kwadratowych. Rozwiązywanie równań kwadratowych z parametrem. Zadanie na dowodzenie. Zasób zawiera zadania otwarte z rozwiązaniami.

Równanie kwadratowe

W tym materiale zawarte są informacje na temat równań kwadratowych. Przypomnisz sobie w jaki sposób rozwiązujemy tego typu równania. Poznasz twierdzenie dotyczące liczby rozwiązań równania kwadratowego.

Przykład 1

W prostokącie o polu równym 56 jeden z boków jest o 10 dłuższy od drugiego.

Obliczymy obwód tego prostokąta.

Rozwiązanie:

Oznaczmy długość krótszego boku tego prostokąta przez x, gdzie $x > 0$. Wtedy drugi bok tego prostokąta ma długość $x + 10$, a pole tego prostokąta jest równe $x(x + 10)$.

Wiadomo, że pole tego prostokąta jest równe 56. Otrzymujemy więc równanie

$$x(x + 10) = 56.$$

Przekształcamy to równanie równoważnie

$$x^2 + 10x = 56,$$

$$x^2 + 10x - 56 = 0.$$

Szukamy zatem miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 10x - 56$.

Obliczamy wyróżnik odpowiedniego trójmianu kwadratowego
$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56) = 324$.

Wyróżnik jest dodatni, więc funkcja ta ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-10-\sqrt{324}}{2\cdot 1} = \frac{-10-18}{2} = -14$$

oraz

$$x_2 = \frac{-10+\sqrt{324}}{2\cdot 1} = \frac{-10+18}{2} = 4.$$

Warunki zadania spełnia jedynie liczba $x = 4$.

Długość drugiego boku tego prostokąta jest równa $x + 10 = 14$, a obwód prostokąta jest równy $2 \cdot (4 + 14) = 36$.

Uwaga:

Można od razu zauważyć, że $4 \cdot (4 + 10) = 56$, wobec tego liczba 4 jest rozwiązaniem równania $x(x + 10) = 56$.

Jest to więc miejsce zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 10x - 56$.

Wzór tej funkcji można zapisać w postaci iloczynowej, gdzie jednym z czynników jest $x - 4$:

$$f(x) = x^2 + 10x - 56 = x^2 - 4x + 14x - 56 =$$

$$= x(x - 4) + 14(x - 4) = (x - 4)(x + 14).$$

Przykład 2

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 8, a jedna z przyprostokątnych jest o 2 krótsza od drugiej. Wykażemy, że pole tego trójkąta jest równe 15.

Rozwiązanie:

Oznaczmy długość krótszej przyprostokątnej tego trójkąta przez x, gdzie $x > 0$. Wtedy druga przyprostokątna ma długość $x + 2$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy równanie

$$x^2 + (x + 2)^2 = 8^2.$$

Przekształcamy to równanie równoważnie

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 64,$$

$$2x^2 + 4x - 60 = 0,$$

$$x^2 + 2x - 30 = 0.$$

Szukamy zatem dodatnich miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 2x - 30$.

Obliczamy wyróżnik odpowiedniego trójmianu kwadratowego $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 124$.

Ponieważ $\Delta > 0$, więc funkcja ta ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{124}}{2 \cdot 1} = \frac{-2-2\sqrt{31}}{2} = -1 - \sqrt{31}$$

oraz

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{124}}{2 \cdot 1} = \frac{-2+2\sqrt{31}}{2} = -1 + \sqrt{31}.$$

Warunki zadania spełnia jedynie $x = \sqrt{31} - 1$.

Wobec tego przyprostokątne tego trójkąta mają długości $\sqrt{31} - 1$ oraz $\sqrt{31} + 1$, a jego pole jest równe $\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{31} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{31} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{31}^2 - 1^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$, co należało wykazać.

Przykład 3

Wyznaczymy współrzędne punktów, w których prosta o równaniu $y = 2x + 9$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 + 1$.

Rozwiązanie:

Ponieważ współrzędne szukanych punktów przecięcia spełniają każde z równań $y = 2x + 9$ oraz $y = x^2 + 1$, więc $x^2 + 1 = 2x + 9$, stąd $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Szukamy zatem miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = x^2 - 2x - 8$.

Obliczamy wyróżnik odpowiedniego trójmianu kwadratowego.
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$

Funkcja ta ma więc dwa miejsca zerowe

$x_1 = \frac{2-\sqrt{36}}{2\cdot1} = \frac{2-6}{2} = -2$

oraz

$x_2 = \frac{2+\sqrt{36}}{2\cdot1} = \frac{2+6}{2} = 4$.

Gdy $x = -2$, to $y = 2(-2) + 9 = 5$, a gdy $x = 4$, to $y = 2 \cdot 4 + 9 = 17$.

Wobec tego prosta o równaniu $y = 2x + 9$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 + 1$ w dwóch punktach: jeden ma współrzędne $(-2, 5)$, a drugi ma współrzędne $(4, 17)$.

Równanie kwadratowe. Liczba rozwiązań równania kwadratowego

W przykładach rozwiązanie zadania sprowadzało się do znalezienia rozwiązań równania z niewiadomą x, które przekształcaliśmy do postaci

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie $a \neq 0$.

Każde równanie takiego typu nazywamy równaniem kwadratowym z niewiadomą x.

Ponieważ rozwiązania takiego równania to miejsca zerowe funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, więc korzystając z omówionych wcześniej własności funkcji kwadratowej możemy podać algorytm pozwalający ustalić istnienie i liczbę rozwiązań równania kwadratowego w zależności od wartości wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$.

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania kwadratowego

Równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- nie ma rozwiązań rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta < 0$,
- ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste $x_0 = -\frac{b}{2a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$,
- ma dwa (różne) rozwiązania rzeczywiste $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

Warto pamiętać, że przy rozwiązywaniu równań kwadratowych nie zawsze wskazane jest automatyczne stosowanie powyższych wzorów. Bardzo przydatne jest na przykład spostrzeżenie, że iloczyn jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników tego iloczynu jest równy zero.

Pokażemy na kilku przykładach, jak można rozwiązać równanie kwadratowe.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie.

1. $(2x + 1)(5x - 3) = 0$
   Można przekształcić to równanie do postaci $10x^2 - x - 3 = 0$ i wyznaczyć jego rozwiązania za pomocą wzorów, ale jest to zupełnie niepotrzebne. Wystarczy przecież zauważyć, że $(2x + 1)(5x - 3) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2x + 1 = 0$ lub $5x - 3 = 0$, stąd $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{5}$.
2. $x^2 + 16 = 0$
   Zauważamy, że lewa strona równania jest sumą liczby nieujemnej x^2 oraz liczby 16, a więc jest dodatnia. Zatem równanie $x^2 + 16 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.
3. $(4x + 7)^2 = 11^2$
   Aby wyznaczyć wszystkie rozwiązania, przekształcimy równanie, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów
   $(4x + 7)^2 = 11^2$
   $(4x + 7)^2 - 11^2 = 0$
   $(4x + 7 - 11)(4x + 7 + 11) = 0$

   $(4x - 4)(4x + 18) = 0$
   stąd $x = 1$ lub $x = -\frac{9}{2}$.

4. $6x^2 = 19x$
   Przekształcając to równanie do postaci $x(6x-19)=0$, stwierdzamy, że ma ono dwa rozwiązania 0 i $\frac{19}{6}$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie

$x^2 + 10x - 11 = 0.$

Rozwiązanie:

- sposób I:

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego zapisanego po lewej stronie równania:
$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11) = 144.$

Ponieważ $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania

$x_1 = \frac{-10-\sqrt{144}}{2\cdot 1} = -11$ oraz $x_2 = \frac{-10+\sqrt{144}}{2\cdot 1} = 1.$

- sposób II:

Można zauważyć, że 1 jest rozwiązaniem danego równania, gdyż $1^2 + 10 \cdot 1 - 11 = 0.$

Zatem trójmian $x^2 + 10x - 11$ możemy zapisać w postaci iloczynowej, gdzie jednym z czynników jest $x - 1$:

$x^2 + 10x - 11 = x^2 - x + 11x - 11 = x(x-1) + 11(x-1) = (x-1)(x+11).$

Wobec tego równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = 1$ oraz $x_2 = -11.$

Przykład 6

Rozwiążemy równanie

$2x^2 + 9x + 7 = 0.$

Rozwiązanie:

- sposób I:

Obliczamy wyróżnik trójmianu $2x^2 + 9x + 7$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 25.$$

Ponieważ $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania

$x_1 = \frac{-9-\sqrt{25}}{2\cdot 2} = -\frac{7}{2}$ oraz $x_2 = \frac{-9+\sqrt{25}}{2\cdot 2} = -1.$

- sposób II:

Zauważmy, że (-1) jest rozwiązaniem równania
$2 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) + 7 = 2 - 9 + 7 = 0$.

Wobec tego trójmian $2x^2 + 9x + 7$ można zapisać w postaci iloczynowej, gdzie jednym z czynników jest $x + 1$:

$$2x^2 + 9x + 7 = 2x^2 + 2x + 7x + 7 = 2x(x + 1) + 7(x + 1) = (2x + 7)(x + 1).$$

Zatem równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = -1$ oraz $x_2 = -\frac{7}{2}$.

Przykład 7

Rozwiążemy równanie

$3x^2 + 4x + 5 = 345$.

Rozwiązanie:

- sposób I:

Przekształcamy równanie do postaci $3x^2 + 4x - 340 = 0$.

Następnie obliczamy wyróżnik trójmianu $3x^2 + 4x - 340$:

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-340) = 4096.$$

Ponieważ $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{4096}}{2\cdot3} = -\frac{34}{3}$ oraz $x_2 = \frac{-4+\sqrt{4096}}{2\cdot3} = 10$.

- sposób II:

Zauważamy, że 10 jest rozwiązaniem równania $3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 = 345$.

Zatem trójmian $3x^2 + 4x - 340$ można zapisać w postaci iloczynowej, gdzie jednym z czynników jest $x - 10$:

$$3x^2 + 4x - 340 = 3x^2 - 30x + 34x - 340 =$$

$$= 3x(x - 10) + 34(x - 10) = (3x + 34)(x - 10).$$

Oznacza to, że równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = 10$ oraz $x_2 = -\frac{34}{3}$.

Przykład 8

Rozwiążemy równanie

$25x^2 - 90x + 81 = 0$.

- sposób I:

Obliczamy wyróżnik trójmianu $25x^2 - 90x + 81$

$$\Delta = (-90)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 81 = 0.$$

Ponieważ $\Delta = 0$, więc równanie ma jedno rozwiązanie

$$x_0 = \frac{90}{2 \cdot 25} = \frac{9}{5}.$$

- sposób II:

Zauważmy, że trójmian $25x^2 - 90x + 81$ można przekształcić do postaci $(5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 9 + 9^2 = (5x - 9)^2$.

Zatem równanie ma jedno rozwiązanie $x_0 = \frac{9}{5}$.

Przykład 9

Wykażemy, że równanie $3x^2 - 4x + 2 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $3x^2 - 4x + 2$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0.$$

Oznacza to, że równanie $3x^2 - 4x + 2 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Przykład 10

Uzasadnimy, że żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $2x^2 + 3x - 4 = 0$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $2x^2 + 3x - 4$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41.$$

Rozwiązaniami danego równania są więc

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ oraz $x_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}$.

Ponieważ $\sqrt{41}$ nie jest liczbą wymierną, więc żadna z liczb x_1, x_2 nie jest liczbą wymierną.

Wobec tego żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $2x^2 + 3x - 4 = 0$.

Uwaga:

Ponieważ liczba $\sqrt{41}$ jest niewymierna, więc każdy z pierwiastków danego równania jest liczbą niewymierną.

Przykład 11

Ustalimy liczbę rozwiązań równania $x^2 - 2x + c = 0$ w zależności od wartości współczynnika c.

Wyróżnik trójmianu $x^2 - 2x + c$ jest równy $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 4 - 4c$. Zatem dane równanie:

- ma dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $4 - 4c > 0$, czyli dla $c < 1$,
- ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $4 - 4c = 0$, czyli dla $c = 1$,
- nie ma rozwiązań rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $4 - 4c < 0$, czyli dla $c > 1$.

Uwaga:

Można też równanie przekształcić następująco

$$x^2 - 2x = -c,$$

$$x^2 - 2x + 1 = -c + 1,$$

$$(x-1)^2 = 1 - c.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że lewa strona otrzymanego równania jest nieujemna, zatem równanie nie ma rozwiązań, gdy $1 - c < 0$, czyli gdy $c > 1$.

Jeśli natomiast $c = 1$, to otrzymujemy równanie $(x-1)^2 = 0$, które ma jedno rozwiązanie, $x = 1$.

Pozostaje wyznaczyć rozwiązania równania, gdy $c < 1$. Wtedy jego lewa strona jest dodatnia, więc równanie można zapisać w postaci

$$(x-1)^2 = \left(\sqrt{1-c}\right)^2,$$

stąd

$$(x-1)^2 - \left(\sqrt{1-c}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x - 1 - \sqrt{1-c}\right)\left(x - 1 + \sqrt{1-c}\right) = 0.$$

Zatem, gdy $c < 1$, równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = 1 + \sqrt{1-c}$ oraz $x_2 = 1 - \sqrt{1-c}$.

Ćwiczenie 1

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem danego równania $(3x+5)(4-2x)=0$.
- ☐ Równanie $x(x-1)=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste.
- ☐ Oba rozwiązania równania $(2x+1)(3x+7)=0$ są liczbami dodatnimi.
- ☐ Równanie $(x-2)(x+3)=0$ ma dwa rozwiązania 2 oraz (-3).

Ćwiczenie 2

Liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $-3(x+2)(x-7)=0$. Zaznacz, co to oznacza.

- ☐ $x_1+x_2=-5$
- ☐ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{5}{14}$
- ☐ $x_1x_2=-14$
- ☐ $x_1^2+x_2^2=62$

Ćwiczenie 3

Liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $(2x+5)(x-1)=(2x+5)(3-x)$ i $x_1 < x_2$. Zaznacz równości prawdziwe.

- [ ] $2x_1 + 3x_2 = 1$
- [ ] $x_1 = -3$
- [ ] $x_2 = 5$
- [ ] $x_2 = 2$

Ćwiczenie 4

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Równanie $4x^2 = x$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste.
- [ ] Równanie $2x^2 = 16x - 32$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.
- [ ] Równanie $(2x+5)^2 + 3 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.
- [ ] Równanie $(3x-1)^2 = 1$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Ćwiczenie 5

Liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $x^2 - 8x + 5 = 0$ i $x_1 < x_2$. Zaznacz, co to oznacza:

- [ ] $x_2 > 7$
- [ ] $x_1 + x_2 = 8$
- [ ] $x_1 x_2 = 5$
- [ ] $x_1 < 0$

Ćwiczenie 6

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Jednym z rozwiązań równania $2x^2 - x - 10 = 0$ jest liczba całkowita.
- [ ] Jedno z rozwiązań danego równania $x^2 + 2x - 5 = 0$ należy do przedziału $(-4, -3)$.
- [ ] Każde z rozwiązań równania $6x^2 - 5x + 1 = 0$ należy do przedziału $(0, 1)$.
- [ ] Żadna liczba ujemna nie jest rozwiązaniem równania $x^2 - 4x - 1 = 0$.

Ćwiczenie 7

Zaznacz poprawne zakończenie zdania. Większą z dwóch liczb spełniających równanie $-2(x+1)(x+4)=0$ jest:

- 1
- 4
- -1
- 2

Ćwiczenie 8

Liczby x_1 oraz x_2 są rozwiązaniami równania $4(x-2)(x+5)=0$. Zaznacz, ile jest równa suma x_1+x_2.

- -12
- 7
- 3
- -3

Ćwiczenie 9

Dokończ zdanie, zaznaczając prawidłową odpowiedź. Równanie $-(x+3)^2 = (-2)^2$:

- nie ma rozwiązań.
- ma cztery rozwiązania.
- ma dwa rozwiązania.
- ma jedno rozwiązanie.

Ćwiczenie 10

Zaznacz, jakie liczby są rozwiązaniami równania $(x-5)(2x+9) = x(5-x)$.

- 5 oraz $-\frac{9}{2}$
- 0 oraz 5
- 5 oraz -3
- 0 oraz $-\frac{9}{2}$

Ćwiczenie 11

Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $x^2 + 10x - 24 = 0$. Zaznacz, ile jest równa suma ${x_1}^2 + {x_2}^2$.

- 196
- 100
- 576
- 148

Ćwiczenie 12

Wskaż równanie, które nie ma rozwiązań rzeczywistych.

- $5x^2 + 7x - 2 = 0$
- $x^2 - 2x - 5 = 0$
- $x^2 - 2x + 5 = 0$
- $x^2 + 5x + 2 = 0$

Ćwiczenie 13

Liczby x_1 oraz x_2 są rozwiązaniami równania $5x^2 + 4x - 1 = 0$ i $x_1 < x_2$. Oblicz $3x_1 + 10x_2$. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

- -1
- 7
- -5
- 4

Ćwiczenie 14

Liczby x_1 oraz x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $10x^2 + 3x - 1 = 0$. Zaznacz, ile jest równa suma $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

- $-\frac{10}{3}$
- -1
- $\frac{1}{10}$
- 3

Ćwiczenie 15

Rozwiąż równanie i wstaw odpowiednie wyniki w wyznaczone pola.

1. $(x+5)(x-6)=0$, zatem ______.
2. $(2x-3)(3x+7)=0$, zatem ______.
3. $(4x-1)(2-x)=0$, zatem ______.
4. $(8-2x)(9x+11)=0$, zatem ______.

$x=\frac{3}{2}$ lub $x=-\frac{7}{3}$ | $x=\frac{1}{4}$ lub $x=2$ | $x=\frac{5}{2}$ lub $x=-\frac{5}{3}$ | $x=-5$ lub $x=6$ | $x=6$ lub $x=-\frac{11}{7}$ | $x=\frac{1}{3}$ lub $x=4$ | $x=5$ lub $x=6$ | $x=4$ lub $x=-\frac{11}{9}$

Ćwiczenie 16

Rozwiąż równanie i wstaw odpowiednie wyniki w wyznaczone pola.

1. $3x^2-108=0$, zatem ______.
2. $x^2+2=0$, zatem ______.
3. $-4x^2+49=0$, zatem ______.
4. $-2x^2-50=0$, zatem ______.

$x=-7$ lub $x=7$ | $x=-5$ lub $x=5$ | $x=\frac{7}{2}$ lub $x=\frac{7}{3}$ | $x=\frac{7}{2}$ lub $x=-\frac{7}{2}$ | równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych | równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych | $x=\frac{7}{4}$ lub $x=-\frac{7}{4}$ | $x=-6$ lub $x=6$

Ćwiczenie 17

Rozwiąż równanie i wstaw odpowiednie wyniki w wyznaczone pola.

1. $x^2 - 4x + 4 = 0$, zatem ______.
2. $x^2 - 4x = 0$, zatem ______.
3. $9x^2 + 12x + 4 = 0$, zatem ______.
4. $12x - 9x^2 = 0$, zatem ______.

$x = -\frac{2}{3}$ | $x = 0$ lub $x = \frac{4}{3}$ | $x = 0$ lub $x = 4$ | $x = 1$ lub $x = \frac{6}{3}$ | $x = 2$ | $x = -\frac{2}{5}$ | $x = 4$ | $x = 0$ lub $x = 2$

Ćwiczenie 18

Rozwiąż równanie i wstaw odpowiednie wyniki w wyznaczone pola.

1. $x^2 + 2x - 35 = 0$, zatem ______.
2. $x^2 + 6x + 11 = 0$, zatem ______.
3. $4x^2 - 11x - 15 = 0$, zatem ______.
4. $3x^2 + 5x - 28 = 0$, zatem ______.

równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych | $x = -7$ lub $x = 5$ | równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych | $x = -5$ lub $x = 7$ | $x = -3$ lub $x = \frac{13}{6}$ | $x = -4$ lub $x = \frac{7}{3}$ | $x = -6$ lub $x = \frac{7}{2}$ | $x = -1$ lub $x = \frac{15}{4}$

Ćwiczenie 19

Rozwiąż równanie i wstaw odpowiednie wyniki w wyznaczone pola.

1. $x^2 + 4x + 7 = 0$, zatem ______.
2. $x^2 - 6x + 1 = 0$, zatem ______.
3. $x^2 - 8x + 9 = 0$, zatem ______.
4. $x^2 + 2\sqrt{5}x + 3 = 0$, zatem ______.

- $x = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$
- $x = 6 + \sqrt{7}$ lub $x = 6 - \sqrt{7}$
- $x = 5 - 2\sqrt{3}$ lub $x = 5 + 3\sqrt{2}$
- $x = 4 + \sqrt{7}$ lub $x = 4 - \sqrt{7}$
- równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych
- równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych
- $x = -\sqrt{5} + \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{5} - \sqrt{2}$
- $x = 3 - 2\sqrt{2}$ lub $x = 3 + 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 20

Rozwiąż równanie i wstaw odpowiednie wyniki w wyznaczone pola.

1. $2x^2 + 15x = 17$, więc ______.
2. $3x^2 + 7x = 370$, więc ______.
3. $(x - 5)^2 = 3x - 15$, więc ______.
4. $(2x - 7)^2 = 28 - 8x$, więc ______.

- $x = \frac{9}{2}$ lub $x = \frac{3}{4}$
- $x = 3$ lub $x = -\frac{15}{2}$
- $x = 12$ lub $x = -\frac{35}{6}$
- $x = 1$ lub $x = -\frac{17}{2}$
- $x = 5$ lub $x = 8$
- $x = 5$ lub $x = 8$
- $x = \frac{7}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$
- $x = 10$ lub $x = -\frac{37}{3}$

Ćwiczenie 21

Kwadrat liczby x jest 8 razy większy od liczby $x - 2$. Oblicz x. Przeciągnij w lukę prawidłowy wynik.

x wynosi ______.

8 4 6 2

Ćwiczenie 22

Jeżeli dodatnią liczbę x pomnożymy przez liczbę o 5 większą od połowy liczby x, to w wyniku otrzymamy 168. Jaka to liczba? Przeciągnij w lukę prawidłowy wynik.

Ta liczba to $x =$ ______.

16 18 12 14

Ćwiczenie 23

Dwie ujemne liczby całkowite różnią się o 5, a suma ich kwadratów jest równa 193. Znajdź te liczby, następnie przeciągnij i upuść liczby w kolejności rosnącej tak, aby zdanie było prawdziwe,

Te liczby to ______ oraz ______.

(-7) (-9) (-14) (-10) (-12) (-5)

Ćwiczenie 24

Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich jest równa 245. Znajdź te liczby, następnie przeciągnij i upuść liczby w kolejności rosnącej tak, aby zdanie było prawdziwe.

Te liczby to ______, ______ oraz ______.

10 8 12 9 5 11 7 13 6

Ćwiczenie 25

Wyznacz współrzędne punktów wspólnych prostej o równaniu $y = x + 2$ oraz paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x$. Przeciągnij i upuść punkty tak, aby zdanie było prawdziwe. Zacznij od punktu, który ma większy argument.

Współrzędne punktów to ______ oraz ______.

$(1, 2)$ $(-2, 1)$ $(2, 3)$ $(-1, 1)$ $(-2, 2)$ $(1, 3)$

Ćwiczenie 26

Wyznacz wszystkie punkty wspólne wykresów funkcji $f(x) = x^2 - 3x$ oraz $g(x) = 2x^2 - 4$. Przeciągnij i upuść punkty tak, aby zdanie było prawdziwe. Zacznij od punktu, który ma większy argument.

Punktami wspólnymi są ______ oraz ______.

$(2, -2)$ $(1, -2)$ $(-6, 26)$ $(1, -4)$ $(-4, 28)$ $(-8, 24)$

Ćwiczenie 27

W prostokącie A jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego. Gdyby skrócić krótszy bok tego prostokąta o 1 i jednocześnie przedłużyć dłuższy bok o 2, to otrzymalibyśmy prostokąt B o polu równym 16. Wyznacz wymiary prostokąta A , następnie przeciągnij i upuść liczby w kolejności rosnącej tak, aby zdanie było prawdziwe.

Prostokąt ma wymiary ______ i ______.

4 2 5 6 7 3

Ćwiczenie 28

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 17, a jedna z przyprostokątnych jest o 7 dłuższa od drugiej. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta. Uzupełnij zdanie, wpisując liczby rosnąco tak, aby było ono prawdziwe.

Długości przyprostokątnych wynoszą ______ oraz ______.

Ćwiczenie 29

Każdy z dwóch prostokątów ma przekątną długości 25. Krótszy bok pierwszego prostokąta jest o 8 dłuższy od krótszego boku drugiego prostokąta, a dłuższy bok pierwszego prostokąta jest o 4 krótszy od dłuższego boku drugiego prostokąta. Oblicz wymiary każdego z tych prostokątów i uzupełnij je, zaczynając zawsze od mniejszego wymiaru tak, aby zdanie było prawdziwe.

Pierwszy prostokąt ma wymiary ______ i ______, a drugi ______ i ______.

Ćwiczenie 30

Wyznacz wszystkie wartości b, dla których liczba b jest rozwiązaniem równania $x^2 - (b+2)x + 10 = 0$. Dla otrzymanej wartości b wyznacz wszystkie rozwiązania tego równania, a następnie wstaw je do zdania w kolejności rosnącej tak, aby zdanie było prawdziwe.

Dla $b =$ ______. Wtedy otrzymujemy równanie ______, którego rozwiązaniami są ______ oraz ______.

$x^2 - 7x + 10 = 0$, 4, 3, 4, 1, 2, $x^2 - 5x + 12 = 0$, $x^2 - 9x + 16 = 0$, 5, 5, 1, 3

Ćwiczenie 31

Wyznacz wszystkie wartości c, dla których liczba c jest rozwiązaniem równania $x^2 - 10x + 3c = 0$. Dla otrzymanej wartości c wyznacz wszystkie rozwiązania tego równania.

Ćwiczenie 32

Wyznacz wszystkie dodatnie wartości b, dla których równanie $x^2 + 2bx + b = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dla otrzymanej wartości b wyznacz to rozwiązanie.

Ćwiczenie 33

Wykaż, że dla każdej wartości m równanie $x^2 - (m+3)x + 2(m+1) = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Ćwiczenie 34

Wykaż, że dla każdej dodatniej wartości całkowitej k równanie $x^2 - 7kx + 10k^2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania całkowite.