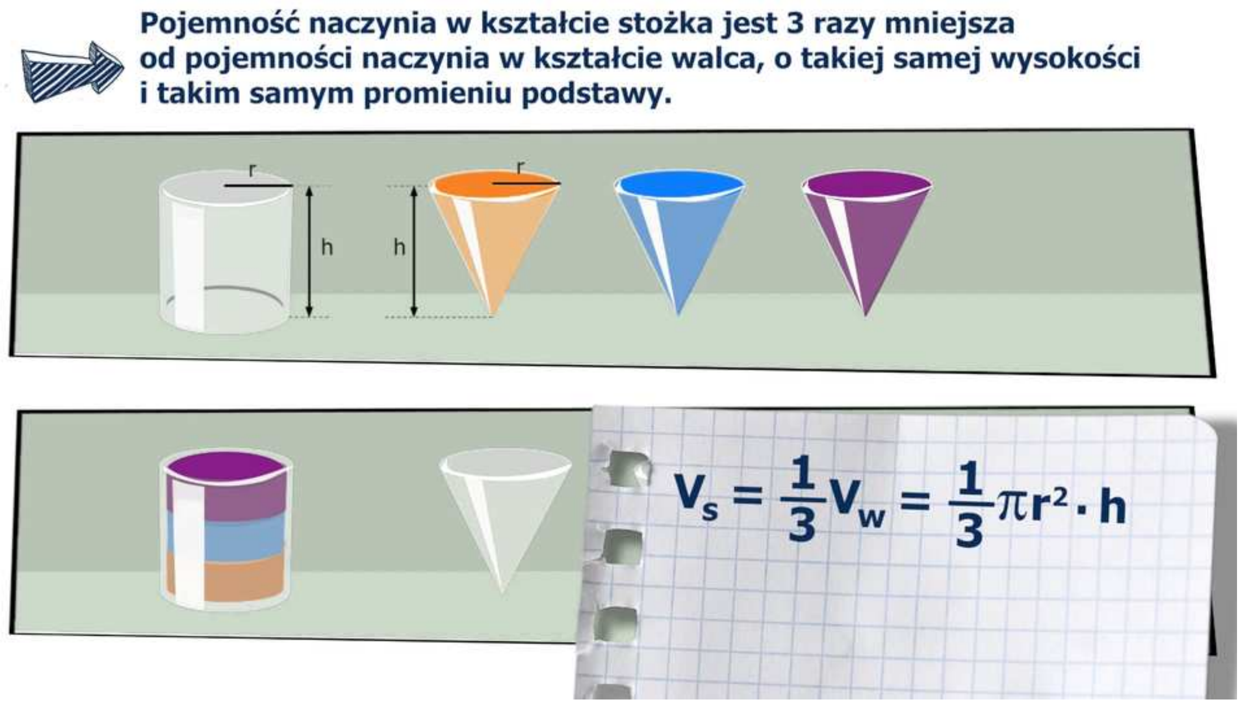
# Objętość stożka

# Objętość stożka

W tym materiale zawarte są informacje na temat objętości stożka. Poznasz wzór na objętość stożka oraz zależność między objętością stożka a objętością walca o takiej samej podstawie i takiej samej wysokości.

## Wzór na objętość stożka




Film dostępny pod adresem [/preview/resource/R1HIzrERCHAbm](/preview/resource/R1HIzrERCHAbm)

Objetosc stozka_4114



Animacja przedstawia wzór na objętość stożka wraz z jego uzasadnieniem.

---

**Przykład 1**

Walec i stożek mają taki sam promień podstawy i taką samą wysokość.

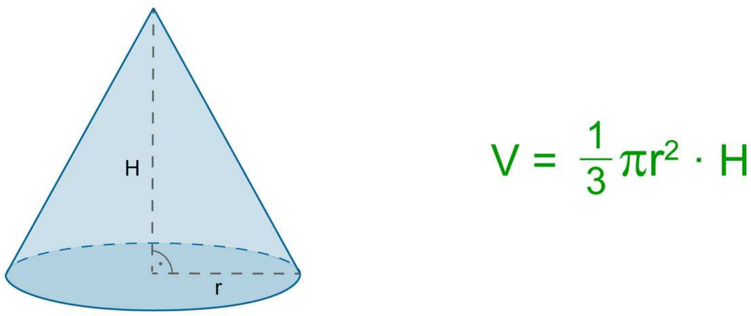
Zaobserwuj, jak zmienia się stosunek objętości walca do objętości stożka wraz ze zmianą wysokości brył.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DcFpsksA8



**Ważne!**

Objętość stożka o wysokości $H$ i promieniu podstawy $r$ wyraża się wzorem:






$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H.$$

**Przykład 2**

Oblicz objętość stożka, którego wysokość jest równa $36 \text{ cm}$, a promień podstawy $4 \text{ cm}$.

Do wzoru na objętość stożka

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot H$$

podstawiamy:

$$H = 36 \text{ cm}, r = 4 \text{ cm},$$

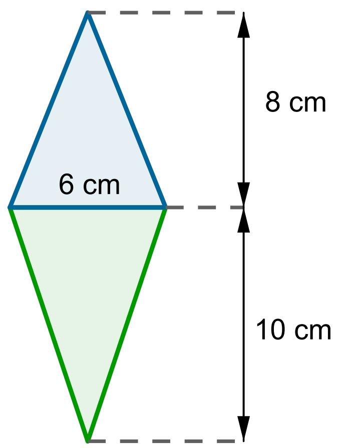
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 36,$$

$$V = 192\pi \text{ cm}^3.$$

Objętość stożka jest równa $192\pi \text{ cm}^3$.

**Przykład 3**

Ile porcji lodów można otrzymać z $1$ l masy lodowej?




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczymy objętość masy lodowej potrzebnej do wykonania jednej porcji lodów, czyli objętość dwóch stożków o wspólnej podstawie. Wysokość jednego z tych stożków jest równa $10\ \text{cm}$, a drugiego $8\ \text{cm}$. Promień podstawy każdego ze stożków jest równy $\frac{6\ \text{cm}}{2} = 3\ \text{cm}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 10 + \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 8,$$

$$V = 30\pi + 24\pi = 54\pi,$$

$$V \approx 54 \cdot 3,14 = 169,56,$$

$$V \approx 169,56\ \text{cm}^3.$$

Na wykonanie jednej porcji lodów potrzeba około $169,56\ \text{cm}^3$ masy lodowej.

Obliczamy teraz, ile lodów można otrzymać z $1$ l masy lodowej.

Ponieważ $1\ \text{l} = 1000\ \text{ml}$, a $1\ \text{ml} = 1\ \text{cm}^3$, zatem $1\ \text{l} = 1000\ \text{cm}^3$.

$$\frac{1000}{169,56} \approx 5,89.$$

Z $1$ l masy lodowej można wykonać $5$ lodów.

## Obliczanie objętości stożka

**Przykład 4**

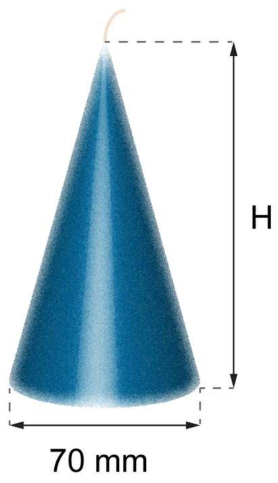
Świeca wykonana z wosku o gęstości $0,9\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ma masę $0,231\ \text{kg}$. Świeca ma kształt stożka o średnicy podstawy równej $70\ \text{mm}$. W czasie godziny wysokość palącej się świecy zmniejsza się przeciętnie o $1\ \text{cm}$. Świecę zapalono o godzinie $20:00$. O której godzinie zgaśnie ta świeca?

Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.

Gęstość wosku podana jest w $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Średnicę świecy zapiszemy więc w centymetrach, a jej masę w gramach, aby ujednolicić jednostki.

$$70 \text{ mm} = 7 \text{ cm},$$

$$0,231 \text{ kg} = 231 \text{ g}.$$






Oznaczmy:

$H$ – wysokość świecy.

Objętość $V$ stożka, w kształcie którego jest świeca, jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot H.$$

Stąd

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{49}{4} \cdot H = \frac{77}{6} \cdot H,$$

$$V = \frac{77}{6} H \ \mathrm{cm}^3.$$

Zapisujemy równość wynikającą z tego, że masa substancji to iloczyn zajmowanej przez nią objętości przez gęstość tej substancji.

$$0,9 \cdot \frac{77}{6} \cdot H = 231.$$

Z zapisanej równości wyznaczamy wysokość świecy.

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{77}{6} \cdot H = 231,$$

$$\frac{231}{20} \cdot H = 231 \ \Big| : \frac{231}{20},$$

$$H = 20 \ \mathrm{cm}.$$

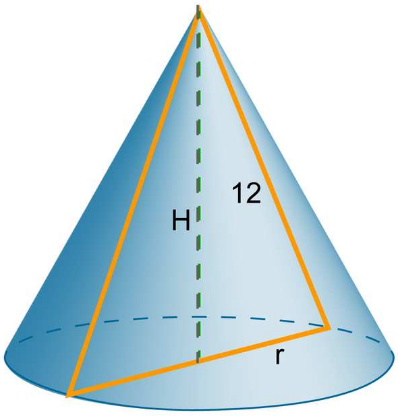
W czasie godziny wysokość świecy zmniejsza się o $1 \ \mathrm{cm}$, czyli świeca będzie paliła się 20 godzin.

Świecę zapalono o godzinie $20:00$, do północy paliła się więc 4 godziny i 16 godzin po północy.

Świeca zgaśnie o godzinie $16:00$ następnego dnia.

**Przykład 5**

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt, którego tworząca jest równa $12 \ \mathrm{dm}$. Pole powierzchni bocznej stożka jest równe $48\pi\sqrt{5} \ \mathrm{dm}^2$. Oblicz objętość stożka.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Aby obliczyć objętość stożka, należy najpierw znaleźć wysokość stożka i promień jego podstawy.

Promień $r$ podstawy stożka znajdujemy, korzystając z tego, że pole powierzchni bocznej stożka jest równe $48\pi\sqrt{5}\ \text{dm}^2$.

$$\pi \cdot r \cdot 12 = 48\pi\sqrt{5},$$

$$r = 4\sqrt{5}\ \text{dm}.$$

Zauważmy, że wysokość stożka jest zarazem wysokością jego przekroju osiowego.

Zatem trójkąt, którego boki mają długości $H$, $r$, $12$ (jak na rysunku), jest prostokątny.

Zapisujemy dla tego trójkąta równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa i wyznaczamy wysokość stożka.

$$H^2 + r^2 = 12^2,$$

$$H^2 + \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 144,$$

$$H^2 + 80 = 144,$$

$$H^2 = 144 - 80,$$

$$H = \sqrt{64},$$

$$H = 8 \text{ dm}.$$

Obliczamy objętość stożka.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8 \cdot \left(4\sqrt{5}\right)^2,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8 \cdot 80,$$

$$V = 213\frac{1}{3} \cdot \pi \text{ cm}^3.$$

Objętość stożka jest równa $213\frac{1}{3} \cdot \pi \text{ cm}^3$.

**Przykład 6**

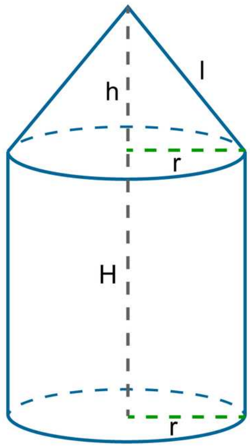
Element ma kształt walca, na którym umieszczony jest stożek.

Przekrojem osiowym tego walca jest kwadrat o polu $9 \text{ m}^2$. Objętość całej bryły wynosi $25,905 \text{ m}^2$.

Oblicz, ile puszek farby należy zakupić, aby pomalować cały element, jeżeli zawartość jednej puszki wystarcza na pomalowanie $5 \text{ m}^2$ powierzchni. Przyjmij $\pi = 3,14$.

Oznaczmy:

- $r$ – promień podstawy walca,
- $H$ – wysokość walca,
- $h$ – wysokość stożka,
- $l$ – długość tworzącej stożka.






Przekrojem osiowym walca jest kwadrat o polu $9 \text{ m}^2$. Wynika z tego, że długość boku tego kwadratu jest równa $\sqrt{9}$ m, czyli 3 m. Wysokość walca $H$ jest więc równa 3 m, a promień jego podstawy $r = \frac{3 \text{ m}}{2} = 1,5$ m. Objętość elementu jest równa sumie objętości walca i stożka.

$$\pi r^2 \cdot H + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 25,905.$$

Dla ułatwienia obliczeń wyłączamy z obu składników wspólne czynniki poza nawias.

$$\pi r^2 \left(H + \frac{1}{3}h\right) = 25,905,$$

$$3,14 \cdot (1,5)^2 \cdot \left(3 + \frac{1}{3}h\right) = 25,905,$$

$$7,065\left(3+\frac{1}{3}h\right)=25,905 \,\Big|\, :3,14,$$

$$2,25\left(\frac{9+h}{3}\right)=8,25,$$

$$0,75(9+h)=8,25 \mid :0,75,$$

$$9+h=11,$$

$$h=2 \text{ m}.$$

Teraz, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość tworzącej stożka.

$$l^2=h^2+r^2,$$

$$l=\sqrt{2^2+(1,5)^2}=\sqrt{6,25}=2,5,$$

$$l=2,5 \text{ m}.$$

Obliczamy pole $P$ powierzchni całkowitej elementu, czyli sumę pola koła (podstawy bryły), pola powierzchni bocznej walca i pola powierzchni bocznej stożka.

$$P=\pi r^2+2\pi r\cdot H+\pi rl,$$

$$P=\pi r(r+2H+l),$$

$$P=3,14\cdot 1,5(1,5+2\cdot 3+2,5),$$

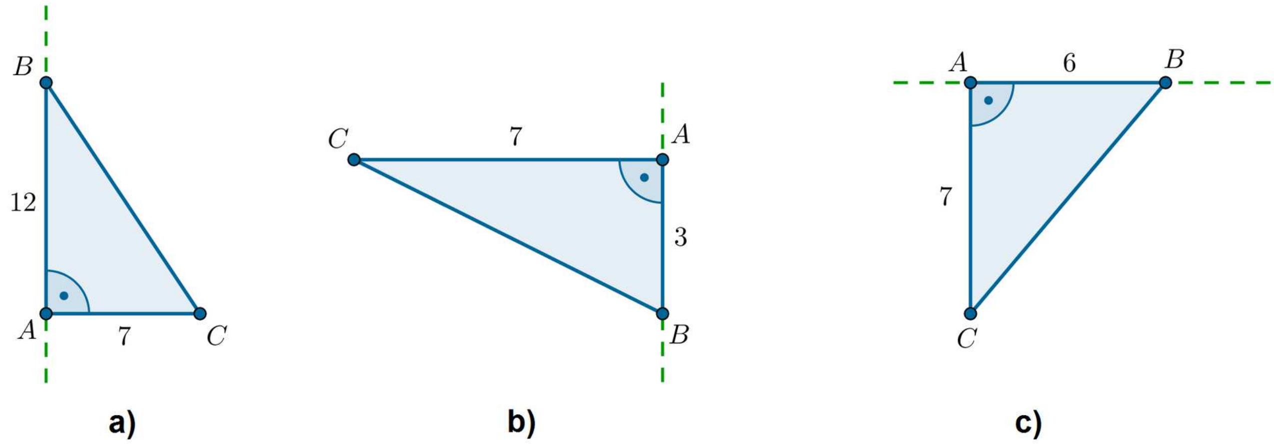
$$P = 4,71 \cdot 10 = 47,1,$$

$$P = 47,1 \text{ m}^2.$$

Jedna puszka farby wystarcza na pomalowanie $5 \text{ m}^2$ powierzchni. Ponieważ $\frac{47{,}1}{5} = 9,42$, zatem należy kupić 10 puszek farby.

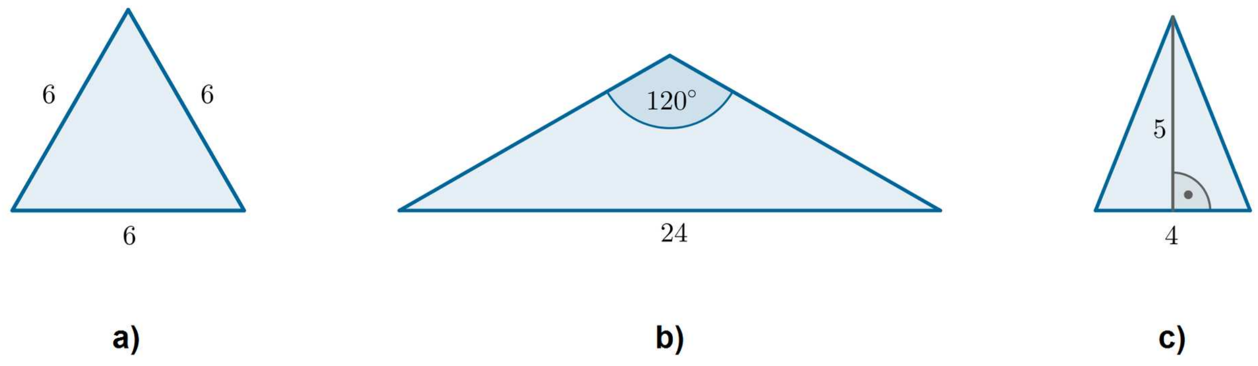
**Ćwiczenie 1**

Oblicz objętość stożka otrzymanego w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego $ABC$ wokół prostej $AB$. Przyjmij $\pi = 3\frac{1}{7}$.



### Ćwiczenie 2

Na rysunku poniżej przedstawiono przekrój osiowy trzech stożków.

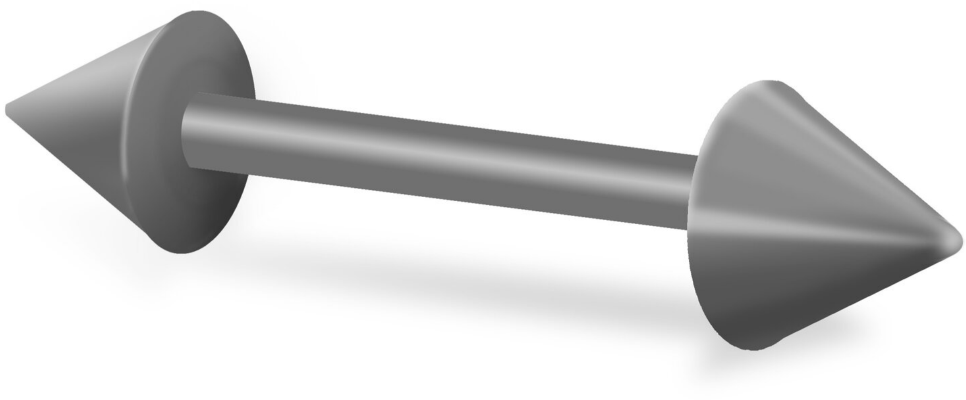







### Ćwiczenie 3

Karnisz składa się z trzech elementów. Dwa elementy są jednakowe i każdy z nich ma kształt stożka o średnicy podstawy $120\ \text{mm}$ i wysokości $8\ \text{cm}$. Trzeci element ma kształt walca o wysokości $2\ \text{m}$ i średnicy podstawy $60\ \text{mm}$. Oblicz, ile $\text{cm}^3$ aluminium zużyto na wykonanie karnisza. Przyjmij $\pi = 3,14$.

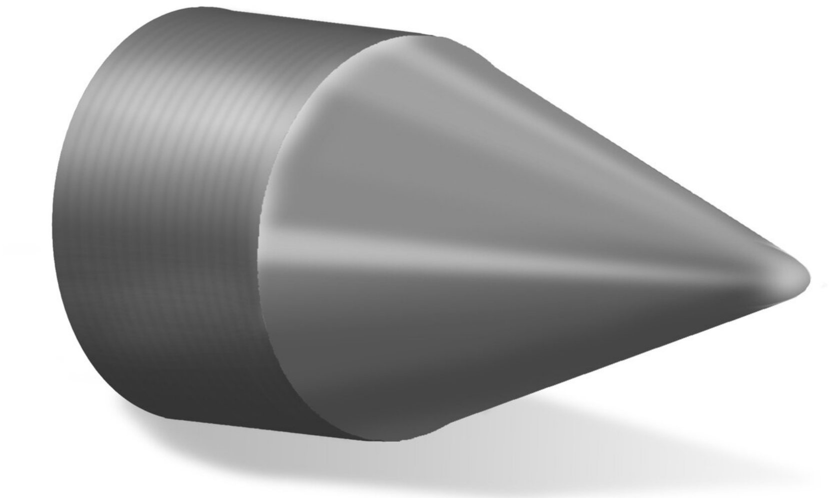




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 4

Powierzchnia boczna elementu składającego się ze stożka i walca (jak na rysunku) jest równa $135\pi$. Promień podstawy walca jest równy $5$, a tworząca stożka $13$. Oblicz objętość elementu.

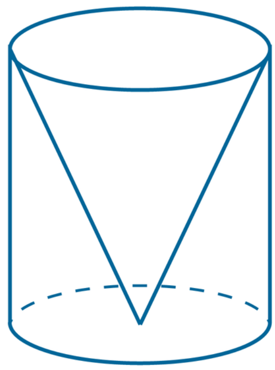


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 5

Do szklanki w kształcie walca wstawiono lejek w kształcie stożka. Naczynia mają równe wysokości i średnice.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 11

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 12

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 13

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 14

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 15



### Ćwiczenie 16

Naszkicuj bryłę powstałą w wyniku obrotu:

a. trójkąta równoramiennego wokół jego podstawy,

b. kwadratu wokół jego przekątnej.



### Ćwiczenie 17



### Ćwiczenie 18

- $\frac{V\pi}{r^2}$
- $3V + \pi r^2$
- $\frac{\pi r^2}{3V}$
- $\frac{3V}{\pi r^2}$



### Ćwiczenie 19



### Ćwiczenie 20