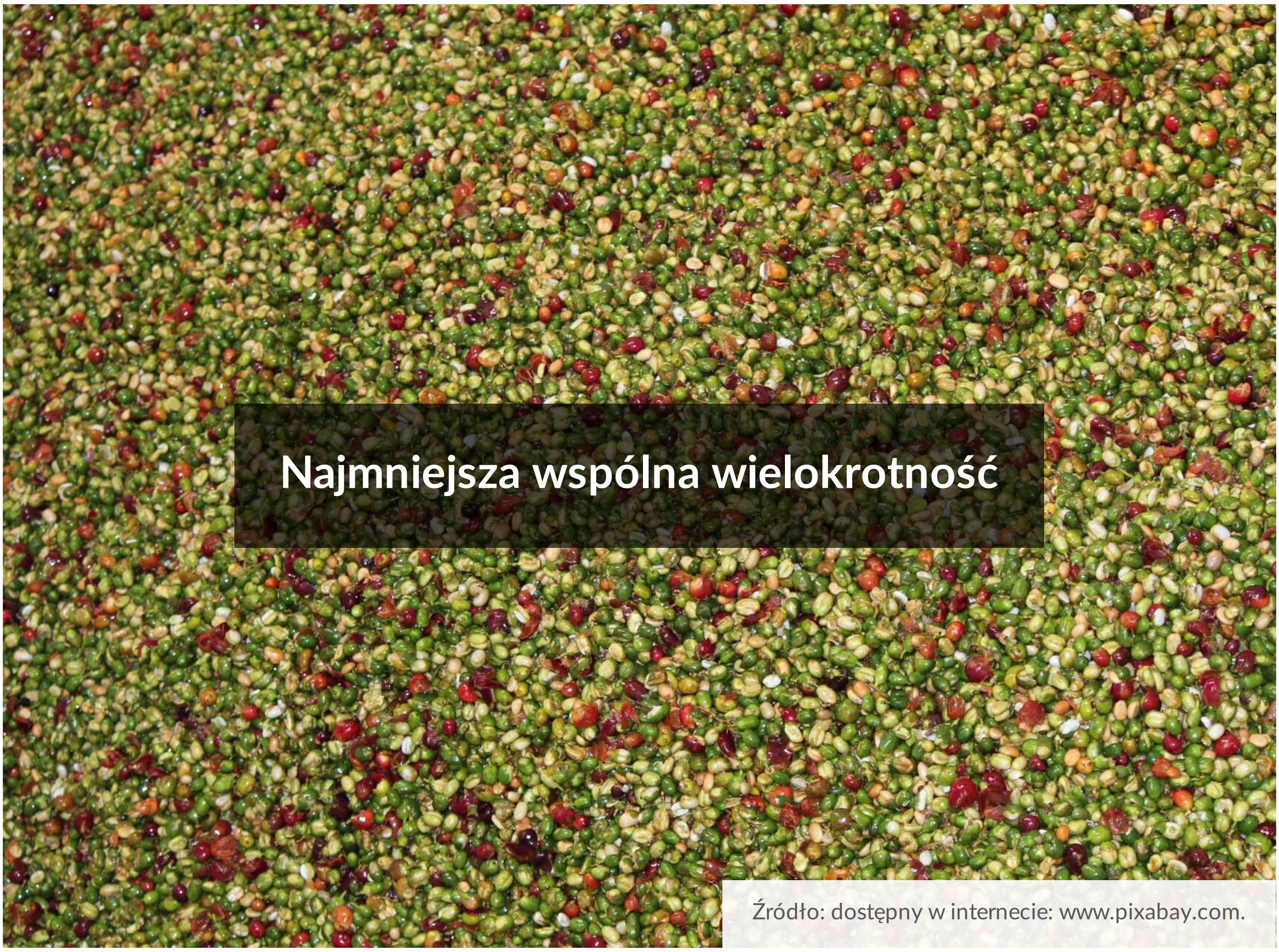
Najmniejsza wspólna wielokrotność

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Pojęciem blisko związanym z największym wspólnym dzielnikiem jest najmniejsza wspólna wielokrotność. W tej lekcji skupimy się na wyznaczaniu najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych, ale analogicznie definiuje się to pojęcie dla wyrażeń algebraicznych ze szczególnym uwzględnieniem wielomianów. Jednym z pierwszych momentów w edukacji matematycznej, kiedy spotykamy się z tym terminem jest nauka dodawania i odejmowania ułamków zwykłych o różnych mianownikach. Aby te działania wykonać, potrzebujemy wspólnego mianownika rozważanych ułamków. Staramy się, aby był on najmniejszy, ale w praktyce bywa różnie.

Twoje cele

- Wyznaczysz najmniejszą wspólną wielokrotność liczb naturalnych.
- Wykorzystasz zależność między najmniejszą wspólna wielokrotnością, a największym wspólnym dzielnikiem dwóch liczb naturalnych.

Przeczytaj

W materiale *“Dzielniki i wielokrotności”* przyjęliśmy następującą definicję:

> **Definicja: Wielokrotność liczby naturalnej n**
>
> Wielokrotnością liczby naturalnej n nazywamy każdy iloczyn n przez dowolną liczbę naturalną.

> **Przykład 1**
>
> Wprost z definicji wynika, że wielokrotnościami liczby 6 są liczby: $0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \ldots$
>
> Zaś wielokrotnościami liczby 4 są liczby: $0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, \ldots$
>
> Wspólnymi wielokrotnościami liczb 6 i 4 są liczby: $0, 12, 24, 36, \ldots$
>
> Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 6 i 4 jest 0.
>
> Najmniejszą dodatnią wspólną wielokrotnością liczb 6 i 4 jest 12.

> **Definicja: Najmniejsza wspólna wielokrotność dodatnich liczb naturalnych a i b**
>
> Najmniejszą wspólną wielokrotnością dodatnich liczb naturalnych a i b jest najmniejsza dodatnia liczba naturalna, która jest podzielna przez każdą z liczb a i b.

Analogiczną definicję można sformułować dla więcej niż dwóch liczb naturalnych.

> **Definicja: Najmniejsza wspólna wielokrotność dodatnich liczb naturalnych**
>
> Najmniejszą wspólną wielokrotność dodatnich liczb naturalnych a i b oznaczamy $NWW(a,\ b)$.

Wyznaczanie najmniejszej wspólnej wielokrotności metodą pokazaną w przykładzie 1 może być uciążliwe. Dlatego zwykle wykorzystujemy w tym celu **rozkłady na czynniki pierwsze**.

> **Przykład 2**
>
> Rozważymy kilka przykładów:
>
> $NWW(2,\ 5) = 2 \cdot 5 = 10$, bo 10 to najmniejsza liczba podzielna przez 2 i 5.
>
> $NWW(2,\ 5,\ 3) = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$, bo 30 to najmniejsza liczba podzielna przez 2, 5 i 3.
>
> $NWW\left(2^3,\ 5^2\right) = 2^3 \cdot 5^2 = 200$, bo 200 to najmniejsza liczba podzielna przez 2^3 i 5^2.
>
> $NWW\left(2^3 \cdot 5^4,\ 2^4 \cdot 5^2\right) = 2^4 \cdot 5^4 = 10000$, bo 10000 to najmniejsza liczba podzielna przez $2^3 \cdot 5^4$ i $2^4 \cdot 5^2$.
>
> $NWW\left(2^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2,\ 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2\right) = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 3^2$, bo $2^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 3^2$ to najmniejsza liczba podzielna przez $2^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2$ i $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

Zwróć uwagę, że rozkład na czynniki pierwsze najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb a i b zawiera tylko i wyłącznie liczby pierwsze pochodzące z rozkładów liczb a i b.

Ponadto najmniejsza wspólna wielokrotność liczb, które są względnie pierwsze, jest równa ich iloczynowi.

> **Przykład 3**
>
> Wyznaczymy najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 2250 i 945.
>
> Zaczniemy od rozkładu obu liczb na czynniki pierwsze:

$$
\begin{array}{r|l}
2250 & 2 \\
1125 & 3 \\
375 & 3 \\
125 & 5 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
945 & 3 \\
315 & 3 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

Zatem $2250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ oraz $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

Aby liczba dzieliła się przez 2250, musi dzielić się przez 2, drugą potęgę liczby 3 i trzecią potęgę liczby 5.

Aby liczba dzieliła się przez 945, musi dzielić się przez 5, 7 i trzecią potęgę liczby 3.

Najmniejsza liczba podzielna przez 2250 i 945 to $2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 = 47250$.

Zatem $NWW(2250,\ 945) = 47250$.

Zauważmy, że aby wyznaczyć najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb, wystarczy rozłożyć obie na czynniki pierwsze, a następnie pomnożyć wszystkie czynniki tworzące rozkład jednej z rozważanych liczb przez te czynniki z rozkładu drugiej, których brakuje w rozkładzie tej pierwszej.

Przykład 4

Wyznaczymy najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 18, 75 oraz 35.

Zauważmy, że:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 7 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Aby liczba dzieliła się przez 18, musi dzielić się przez 2 i drugą potęgę liczby 3.

Aby liczba dzieliła się przez 75, musi dzielić się przez 3 i drugą potęgę liczby 5.

Aby liczba dzieliła się przez 35, musi dzielić się przez 7 i 5.

Najmniejsza liczba podzielna przez 18, 75 i 35 to iloczyn liczby 2, drugiej potęgi liczby 3, drugiej potęgi liczby 5 i liczby 7.

Zatem $NWW(18,\ 75,\ 35) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3150$.

Rozważmy liczby naturalne dodatnie a i b. Każdą z nich można zapisać jako iloczyn ich największego wspólnego dzielnika oraz pewnej liczby naturalnej.

Zatem: $a = k \cdot d$ i $b = m \cdot d$

gdzie:
k i m – są liczbami naturalnymi, zaś $d = NWD(a,\ b)$.

Zauważmy, że liczby k i m są względnie pierwsze (bo gdyby k i m miały dzielnik p większy od 1, to wówczas $NWD(a,\ b) = d \cdot p > d$).

Wynika stąd, że $NWW(a,\ b) = k \cdot d \cdot m$. Jeśli pomnożymy obie strony powyższej równości przez d, otrzymujemy $d \cdot NWW(a,\ b) = k \cdot d \cdot m \cdot d$, czyli $NWD(a,\ b) \cdot NWW(a,\ b) = a \cdot b$.

Bardzo często stosowaną praktyką jest wyznaczanie największego wspólnego dzielnika dwóch liczb za pomocą algorytmu Euklidesa, a następnie obliczanie najmniejszej wspólnej wielokrotności z przekształconej postaci ostatniej równości:

$$NWW(a,\ b) = \frac{a \cdot b}{NWD(a, b)}$$

Przykład 5

Obliczymy $NWW(225,\ 420)$ korzystając ze wzoru $NWW(a,\ b) = \frac{a \cdot b}{NWD(a, b)}$.

Najpierw zastosujemy algorytm Euklidesa, aby obliczyć $NWD(225,\ 420)$:

$420 = 1 \cdot 225 + 195$

$225 = 1 \cdot 195 + 30$

$195 = 6 \cdot 30 + 15$

$30 = 2 \cdot 15 + 0$

Zatem $NWD(225,\ 420) = 15$.

Stąd $NWW(225,\ 420) = \frac{225 \cdot 420}{15} = 6300$.

Przykład 6

Udowodnimy, że wzór $NWD(a,\ b,\ c) \cdot NWW(a,\ b,\ c) = a \cdot b \cdot c$ nie jest prawdziwy dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c.

Rozważmy liczby 6, 8 i 10.

> Wówczas łatwo sprawdzić, że $NWD(6,\ 8,\ 10) = NWD\left(3 \cdot 2,\ 2^3,\ 2 \cdot 5\right) = 2$ oraz $NWW(6,\ 8,\ 10) = NWW\left(3 \cdot 2,\ 2^3,\ 2 \cdot 5\right) = 3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 5 = 120$.
>
> Wówczas $NWD(6,\ 8,\ 10) \cdot NWW(6,\ 8,\ 10) = 2 \cdot 120 = 240$, zaś $6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$,
>
> zatem $NWD(6,\ 8,\ 10) \cdot NWW(6,\ 8,\ 10) \neq 6 \cdot 8 \cdot 10$.

Jeśli chcemy obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność trzech liczb naturalnych, możemy najpierw wyznaczyć najmniejszą wspólną wielokrotność w dwóch spośród trzech podanych liczb, a następnie najmniejszą wspólną wielokrotność liczby w i trzeciej z rozważanych liczb. Innymi słowy zachodzi zależność:

$$NWW(a,\ b,\ c) = NWW(a,\ NWW(b,\ c))$$

Słownik

> **najmniejsza wspólna wielokrotność**
>
> najmniejszą wspólną wielokrotnością dodatnich liczb naturalnych a i b nazywamy najmniejszą dodatnią liczbę naturalną, która jest podzielna przez a i przez b

> **największy wspólny dzielnik**
>
> największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych a i b nazywamy największą liczbę naturalną dodatnią, która dzieli liczbę a i liczbę b

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Ułóż domino.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dpv6IR8nE

Polecenie 2

Stwórz sześć kostek domina, na których znajdą się przykłady dotyczące największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych. Daj swoje domino do ułożenia koledze z klasy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wyznacz najmniejszą wspólną wielokrotność dla podanych par liczb.

a)

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

c)

$$
\begin{array}{r|l}
126 & 2 \\
63 & 3 \\
21 & 3 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

Ćwiczenie 2

Wyznacz najmniejszą wspólną wielokrotność dla podanych zestawów liczb.

a)

$$\begin{array}{r|l} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Wykorzystując zależność między największym wspólnym dzielnikiem i najmniejszą wspólną wielokrotnością dwóch liczb naturalnych oraz algorytm Euklidesa, wyznacz najmniejszą wspólną wielokrotność dla podanych par liczb.

a) 96 i 122

b) 88 i 120

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb naturalnych jest równa 432, zaś ich największy wspólny dzielnik to 24.

Wyznacz te liczby.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Najmniejsza wspólna wielokrotność

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż: a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych, b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Wyznaczysz najmniejszą wspólną wielokrotność liczb naturalnych.
- Wykorzystasz zależność między najmniejszą wspólna wielokrotnością, a największym wspólnym dzielnikiem dwóch liczb naturalnych.

Strategie nauczania:

- strategia asocjacyjna;
- strategia problemowa.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- ekspozycja;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Najmniejsza wspólna wielokrotność” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 - „Ułóż domino.” z sekcji „Gra edukacyjna”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1–2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania , omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6–8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Najmniejsza wspólna wielokrotność”).

Materiały pomocnicze:

Wielokrotności i dzielniki liczb naturalnych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Najmniejsza wspólna wielokrotność”.