



Czy każde przyporządkowanie jest funkcją?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Audiobook
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Czy każde przyporządkowanie jest funkcją?

Źródło: Jan Antonin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Matematycy, od zarania dziejów, rozważali różne przyporządkowania, również jednoznaczne. Starożytni Egipcjanie, Grecy, Babilończycy zapisywali je początkowo jako algorytmy obliczeń.

Starożytna matematyka nastawiona była na obliczanie konkretnych wartości, wynikających z sytuacji rzeczywistych. Wyposażona była w ułatwiające obliczenia tablice pierwiastków kwadratowych i trzeciego stopnia, w tablice astronomiczne, tablice mnożenia ułamków, tablice odwrotności liczb itd. Była to bardzo pragmatyczna matematyka, w której nie było miejsca na pojęcie abstrakcyjne, jakim jest funkcja.

Dopiero w wieku XVII przyporządkowanie jednoznaczne zyskuje nazwę. Angielski fizyk i matematyk Isaac Newton nazywa je „fluentą”. Filozof i matematyka Gottfrid Leibniz wprowadza nazwę „funkcja”.

Twoje cele

- Podasz przykłady przyporządkowań.
- Odróżnisz te przyporządkowania, które są funkcjami.
- Udowodnisz, że dane przyporządkowanie jest funkcją.

Przeczytaj

Pojęcie **funkcji** jest obecnie jednym z najważniejszych pojęć matematyki. Za pomocą funkcji można opisywać wiele zjawisk z otaczającego nas świata. Również fizycy, chemicy, biologowie często posługują się funkcjami, chcąc zobrazować zaobserwowane prawidłowości.

Aby zrozumieć istotę funkcji, przeanalizujemy najpierw kilka przykładów.

Przykład 1

Rozważmy dwa zbiory.

1. Zbiór pierwszy, którego elementami są wszystkie państwa świata. Oznaczmy go literą A .
2. Zbiór drugi, do którego należą wszystkie miasta świata. Oznaczmy go literą B .

Możemy utworzyć kilka przyporządkowań elementom jednego zbioru, elementów drugiego zbioru.

- Pierwsze przyporządkowanie: każdemu państwu świata przyporządkujemy miasta, które znajdują się na jego terytorium.
Każdemu elementowi zbioru A przyporządkowaliśmy kilkanaście elementów zbioru B .
- Drugie przyporządkowanie: każdemu państwu świata przyporządkujemy miasto, które jest jego stolicą.
Każdemu elementowi zbioru A przyporządkowaliśmy dokładnie jeden element zbioru B .

Przykład 2

Dane są dwa zbiory.

Zbiór wszystkich samochodów zarejestrowanych w Polsce. Oznaczmy ten zbiór literą A . Zbiór kodów liczbowo-literowych. Kody liczbowo-literowe zbudowane są z różnej liczby liter i liczb, np. ABC124567, 365789 NG, hh12456, GH21ELA itd. Oznaczmy ten zbiór przez B .

Utwórzmy różne przyporządkowania elementów jednego zbioru elementom zbioru drugiego.

- Pierwsze przyporządkowanie: każdemu samochodowi zarejestrowanemu w Polsce przyporządkowano kod liczbowo-literowy, który jest jego numerem rejestracyjnym.
Każdemu elementowi zbioru A przyporządkowaliśmy dokładnie jeden element zbioru B .

- Drugie przyporządkowanie: każdemu kodowi liczbowo-literowemu przyporządkowujemy samochód zarejestrowany w Polsce. Niektórym elementom zbioru B przyporządkowaliśmy dokładnie jeden element zbioru A .

Przykład 3

Dane są dwa zbiory.

Zbiór pierwszy, którego elementami są wszystkie miasta w Polsce. Oznaczmy go literą A . Zbiór drugi, którego elementami są wszystkie numery kodów pocztowych. Oznaczmy go literą B .

Utwórzmy różne przyporządkowania elementów jednego zbioru elementom zbioru drugiego.

- Przyporządkowanie pierwsze: każdemu miastu w Polsce przyporządkowujemy numer kodu pocztowego. Każdemu elementowi zbioru A przyporządkowaliśmy elementy zbioru B .
- Przyporządkowanie drugie: każdemu numerowi kodowemu przyporządkowujemy miasto w Polsce. Każdemu elementowi zbioru B przyporządkowaliśmy dokładnie jeden element zbioru A .

Czy każde, z podanych w przykładach przyporządkowań to funkcja? W odpowiedzi na to pytanie pomoże nam w tym poniższa definicja.

Definicja: definicja funkcji

Dane są dwa niepuste zbiory: X i Y . Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y . Symbolicznie oznaczamy $f : X \rightarrow Y$ i czytamy „funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y ”.

- Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a jego elementy x argumentami funkcji.
- Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji.

Każdy element y zbioru Y , który został przyporządkowany co najmniej jednemu argumentowi x nazywamy wartością funkcji f dla argumentu x , co zapisujemy symbolicznie $y = f(x)$. Zbiór tych elementów y nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Analizując definicję **funkcji** możemy zauważyć że:

- każdemu elementowi dziedziny odpowiada dokładnie jedna wartość należąca do przeciwdziedziny,
- zbiór wartości może być zbiorem jednoelementowym,
- **zbiór wartości funkcji** jest podzbiorem przeciwdziedziny funkcji.

Przykład 4

Utwórzmy dwa zbiory: zbiór X , którego elementami są imiona uczniów, zbiór Y , którego elementami są przedmioty egzaminacyjne.

$X = \{\text{Ania, Zosia, Jacek, Michał}\}$.

$Y = \{\text{chemia, biologia, historia, geografia, fizyka, informatyka}\}$.

Przyporządkowanie, które imionom uczniów przypisuje przedmioty egzaminacyjne, zdawane na maturze nie jest funkcją. Na przykład elementowi Ania przyporządkowane są dwa elementy ze zbioru Y : chemia, fizyka.

Przykład 5

Utwórzmy zbiory X i Y . X – zbiór wszystkich trójkątów. Y – zbiór odcinków, które mogą być wysokościami w trójkącie. Przyporządkowanie, które trójkątowi przyporządkowuje jego wysokości nie jest funkcją – jednemu trójkątowi możemy przyporządkować nawet trzy różne odcinki (wysokości).

Przykład 6

Przykładem funkcji jest na przykład przyporządkowanie, które każdej osobie przypisuje jej numer PESEL.

Słowniczek

funkcja

dane są dwa niepuste zbiory X i Y . Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y

zbiór wartości funkcji

zbiór tych elementów przeciwdziedziny funkcji, które zostały przyporządkowane co najmniej jednemu elementowi z dziedziny funkcji

Audiobook




Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym audiobookiem. Poznasz historię powstania pojęcia „funkcja”. Poznasz również przykłady przyporządkowań jednoznacznych, z którymi można spotkać się w życiu codziennym. Przeanalizuj je uważnie.

Polecenie 2

Podaj przykłady trzech przyporządkowań, które są funkcjami. Określ dziedzinę i zbiór wartości każdej z tych funkcji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



W poziome wiersze wpisz odgadnięte nazwiska uczonych. Litery z zaznaczonej kolumny, czytane pionowo, utworzą hasło.

1. Matematyk z Pizy.
2. Podał pierwszą formalną definicję funkcji.
3. Ułożył tablice logarytmów naturalnych.
4. Imię uczonego z Oresme.
5. Podał ogólną definicję funkcji.
6. Stworzył prostokątny układ współrzędnych.
7. Podzielił funkcje na algebraiczne i przestępne.

1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Czy każde przyporządkowanie jest funkcją?

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy

Podstawa programowa

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

1. określa funkcję jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

1. kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
2. kompetencje w zakresie wielojęzyczności,
3. kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
4. kompetencje cyfrowe,
5. kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opíše językiem matematyki zjawiska z otaczającego świata,
- poda przykłady różnych przyporządkowań,
- odróżni te przyporządkowania, które są funkcjami,
- udowodni, że dane przyporządkowanie jest funkcją.

Strategie nauczania - konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem filmu edukacyjnego i ćwiczeń interaktywnych
- burza mózgów
- dyskusja

Formy zajęć:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg zajęć:

Faza wprowadzająca:

1. Przed lekcją grupa chętnych uczniów przygotowuje krótką prezentację multimedialną dotyczącą różnego rodzaju przyporządkowań.
2. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.
3. Uczniowie oglądają prezentację przygotowaną przez swoich kolegów i koleżanki. Jest ona wprowadzeniem do lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, podzieleni na sześć grup, analizują przykłady zamieszczone w części wstępnej.
 - Wykonują ilustrację graficzną każdego z przyporządkowań.
 - Określają, czy dane przyporządkowanie jest jednoznaczne, czy nie.

Grupa 1 i 4:

Przykład 1.

Mamy dwa zbiory.

Zbiór pierwszy, którego elementami są wszystkie państwa świata. Oznaczmy go literą A.

Zbiór drugi, do którego należą wszystkie miasta świata. Oznaczmy go literą B.

Możemy utworzyć kilka przyporządkowań elementom jednego zbioru, elementów drugiego zbioru.

Pierwsze przyporządkowanie : każdemu państwu świata przyporządkujemy miasta, które znajdują się na jego terytorium. Każdemu elementowi zbioru A przyporządkowaliśmy kilkanaście elementów zbioru B.

Drugie przyporządkowanie: każdemu miastu świata przyporządkujemy państwo, na terytorium, którego to miasto się znajduje.

Trzecie przyporządkowanie: każdemu państwu świata przyporządkujemy miasto, które jest jego stolicą. Każdemu elementowi zbioru A przyporządkowaliśmy dokładnie jeden element zbioru B.

Grupa 2 i 5:

Przykład 2.

Dane są dwa zbiory.

Zbiór wszystkich samochodów zarejestrowanych w Polsce. Oznaczmy ten zbiór literą A. Zbiór kodów liczbowo-literowych. Kody liczbowo-literowe zbudowane są z różnej liczby liter i liczb, np. ABC124567, 365789 NG, hh12456, GH21ELA itd. Oznaczmy ten zbiór przez B.

Utwórzmy różne przyporządkowania elementów jednego zbioru elementom zbioru drugiego.

Pierwsze przyporządkowanie: każdemu samochodowi zarejestrowanemu w Polsce przyporządkowano kod liczbowo-literowy, który jest jego numerem rejestracyjnym. Każdemu elementowi zbioru A przyporządkowaliśmy dokładnie jeden element zbioru B.

Drugie przyporządkowanie: każdemu kodowi liczbowo-literowemu przyporządkowujemy samochód zarejestrowany w Polsce. Niektórym elementom zbioru B przyporządkowaliśmy dokładnie jeden element zbioru A.

Grupa 3 i 6:

Przykład 3.

Weźmy dwa zbiory.

Zbiór pierwszy, którego elementami są wszystkie miasta w Polsce. Oznaczmy go literą A.

Zbiór drugi, którego elementami są wszystkie numery kodów pocztowych. Oznaczmy go literą B. Utwórzmy różne przyporządkowania elementów jednego zbioru elementom zbioru drugiego.

Przyporządkowanie pierwsze: każdemu miastu w Polsce przyporządkowujemy numer kodu pocztowego. Każdemu elementowi zbioru A przyporządkowaliśmy kilka elementów zbioru B.

Przyporządkowanie drugie: każdemu numerowi kodowemu przyporządkowujemy miasto w Polsce. Każdemu elementowi zbioru B przyporządkowaliśmy dokładnie jeden element zbioru A.

2. Po upływie wyznaczonego czasu uczniowie łączą się w większe grupy i porównują wyniki swojej pracy. Wspólnie uzgadniają wnioski i przedstawiają je na forum klasy.
3. Uczniowie metodą burzy mózgów szukają odpowiedzi na pytanie: czy każde przyporządkowanie jest przyporządkowaniem jednoznacznym? Weryfikują pomysły i formułują wnioski. Wspólnie formułują definicję funkcji.
4. Uczniowie oglądają multimedialną prezentację, a następnie dyskutują o przyporządkowaniach, które nie są funkcjami.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności takie, jak opisywanie językiem matematycznym zjawisk z otaczającego świata, odróżnianie przyporządkowań jednoznacznych od niejednoznacznych, rozpoznawanie funkcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wyjaśnia wszelkie wątpliwości oraz ocenia pracę uczniów w czasie zajęć.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.
2. Praca domowa dla chętnych: Podaj przykład funkcji opisującej zjawiska chemiczne lub fizyczne.

Materiały pomocnicze:

[Funkcja i jej własności. Część I](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedialnego materiału:

Audiobook można wykorzystać do pracy metodą odwróconej klasy.

Uczniowie mogą wysłuchać audiobooka w domu i na jego podstawie przygotować krótkie wprowadzenie do pojęcia: funkcja.