



Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

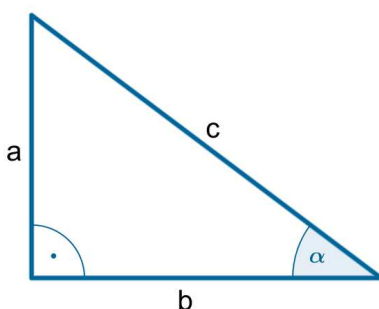
Definicja sinusa, definicja cosinusa, definicja tangensa. Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym. Obliczanie wysokości z wykorzystaniem zależności w trójkącie prostokątnym. Ilustracja interaktywna - definicje funkcji trygonometrycznych. Animacje - wyznaczanie wysokości piramidy Cheopsa, wyznaczanie wysokości rampy. Animacje - prezentacja wykresów funkcji trygonometrycznych.

Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

W tym materiale poznasz definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym. Dowiesz się także, jakie posiadają własności. Zapoznaj się z tym materiałem przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań zawartych w materiale [Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym - zadania](#).

Definicja: Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Założmy, że w trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α . Wprowadzimy nazwy stosunków długości boków tego trójkąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- **Sinusem** kąta ostrego α (w skrócie $\sin \alpha$) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej.
- **Cosinusem** kąta ostrego α (w skrócie $\cos \alpha$) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α do długości przeciwprostokątnej.
- **Tangensem** kąta ostrego α (w skrócie $\tan \alpha$) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α .

Definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym

☒ $\sin \alpha$ ☐ $\cos \alpha$ ☐ $\tan \alpha$ ☐ kąt $90^\circ - \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{\text{długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta } \alpha}{\text{długość przeciwprostokątnej}}$$

Sprawdź, jak zmieniają się wartości funkcji trygonometrycznych.

Za pomocą zaznaczonych punktów możesz zmieniać długości boków trójkąta lub wielkość kąta α .

☐ zmieniaj wielkość kąta ☐ zmieniaj długości boków

$$\sin 50.705^\circ = \frac{a}{c} = \frac{7.332}{9.474} \approx 0.774$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/Pw3rXfwpp>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Korzystając z oznaczeń na rysunku, zapisujemy

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Powyższe zależności nazywa się funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α .

Przykład 1



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R9WPgtxn7Eam4>

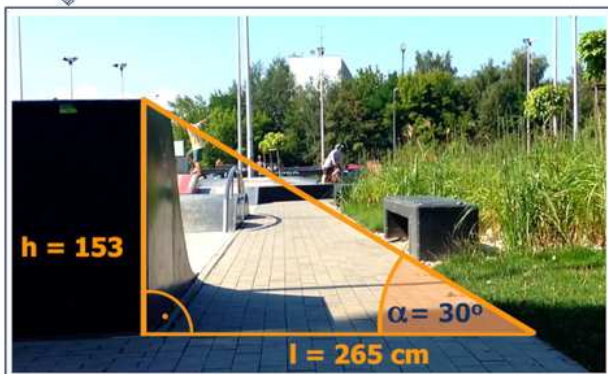
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje, jak wyznaczyć wysokość Piramidy Cheopsa.

Obliczona wartość może różnić się od wartości rzeczywistej ze względu na małą dokładność pomiarów oraz obliczeń.



Jak wyznaczyć wysokość rampy?



szerokość chodnika - 265 cm

$$\frac{h}{l} = \operatorname{tg} \alpha$$



$$\alpha = 30^\circ$$

$$h = l \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$h = 265 \cdot 0,5774 \approx 153$$



Wysokość rampy jest równa około 153 cm.

Film dostępny pod adresem </preview/resource/R423YnZOKpXoR>

Podobienstwo trojkatow prostokatnych_atrapa_animacja_piramida

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje jak wyznaczyć wysokość rampy korzystając z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.

Uwaga!

Bezpośrednio z definicji wynika, że dla dowolnego kąta ostrego α

$$\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0.$$

Ponadto, w każdym trójkącie prostokątnym najdłuższym bokiem jest przeciwprostokątna, zatem dla dowolnego kąta ostrego α

$$\sin \alpha < 1, \cos \alpha < 1.$$

Twierdzenie: 1

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są nierówności:

$$0 < \sin \alpha < 1$$

$$0 < \cos \alpha < 1.$$

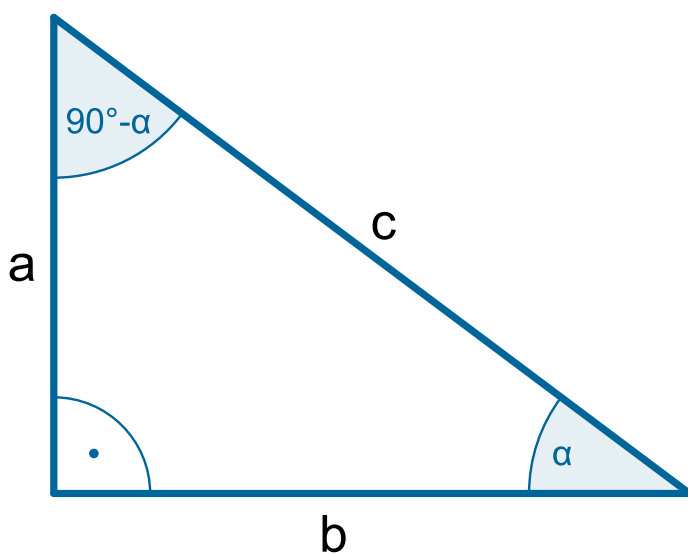
Uwaga!

Jeżeli jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę α , to drugi kąt ostry w tym trójkącie ma miarę $90^\circ - \alpha$. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych, zapisujemy

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a}.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: 2

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości

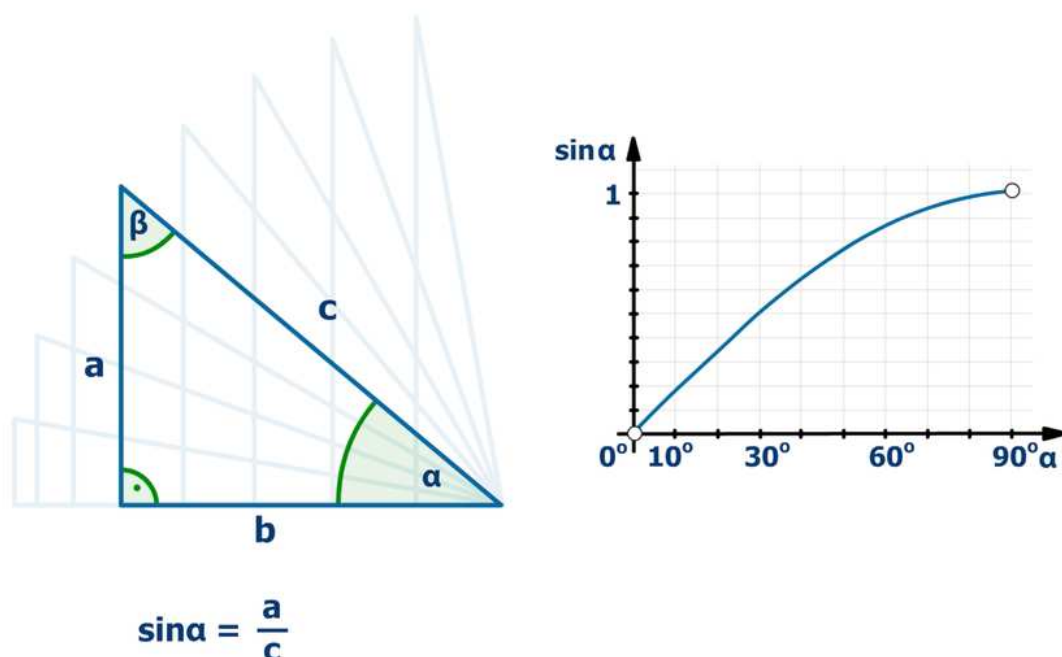
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją, która pokazuje jak obliczamy sinusy kątów ostrych.



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/R1ruKn4eO4V3V](https://preview.resource/R1ruKn4eO4V3V)

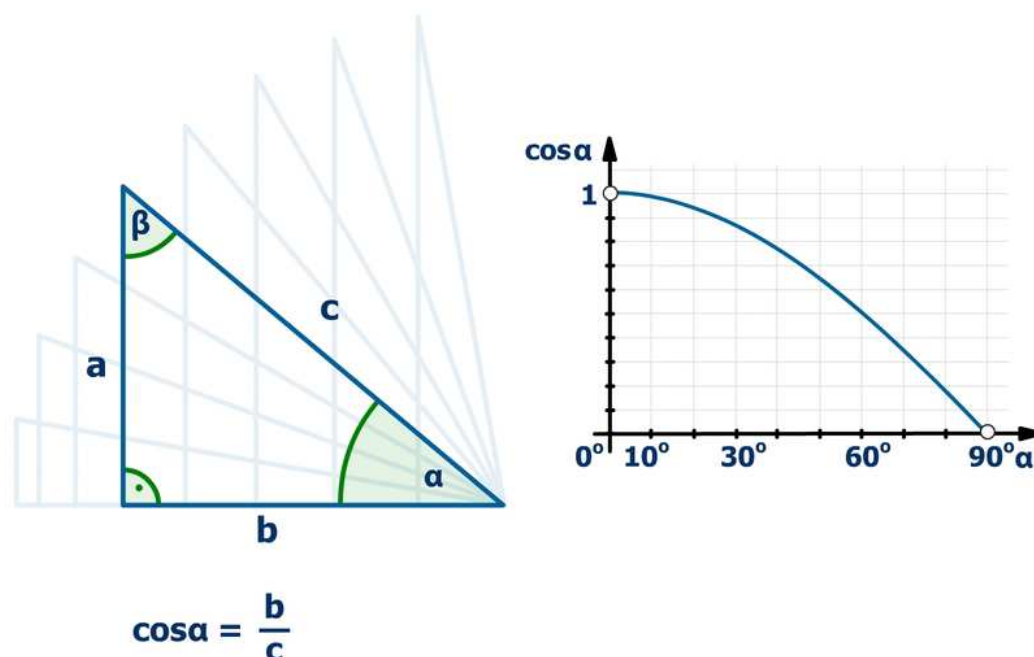
Podobienstwo trójkątów prostokątnych_atrapa_animacja_514

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje jak obliczyć sinus dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a, b i przeciwprostokątnej długość c. Kąt alfa leży naprzeciw przyprostokątnej a, kąt beta leży naprzeciw przyprostokątnej b. Mierzmy linijką długości przyprostokątnej a i przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego dla kątów 10 stopni, 20 stopni, 30 stopni, 40 stopni, 50 stopni, 60 stopni, 80 stopni, 90 stopni. Otrzymane liczby wstawiamy do wzoru funkcji sinus i obliczamy wartość funkcji sinus dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji sinus.

Polecenie 2

Zapoznaj się z poniższą animacją, która pokazuje, jak obliczamy cosinusy kątów ostrych.



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RpCUgFQNB6haW](https://preview.resource/RpCUgFQNB6haW)

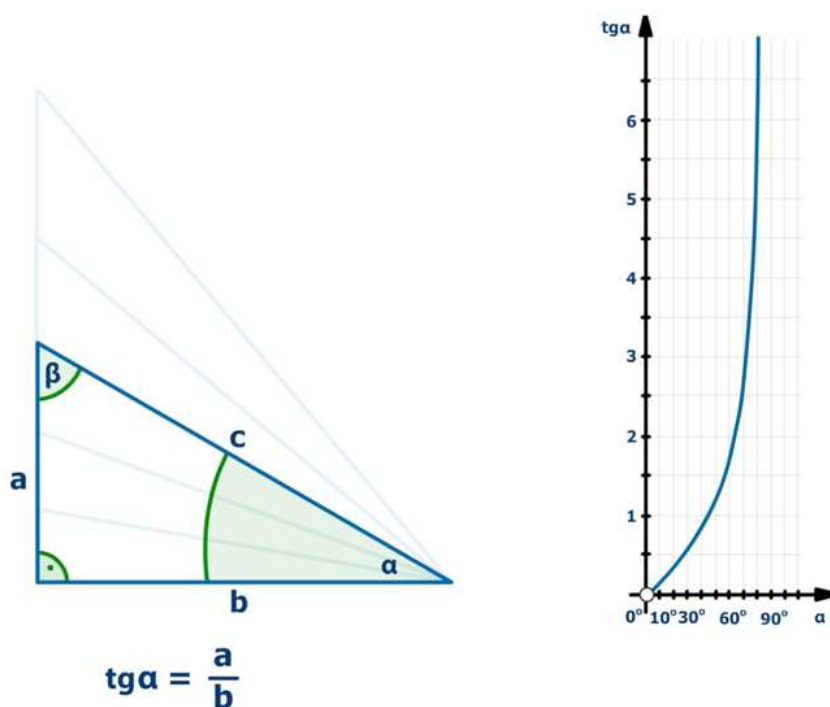
Podobienstwo trójkątów prostokątnych_atrapa_animacja_515

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje jak obliczyć cosinus dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a , b i przeciwprostokątnej długość c . Kąt α leży naprzeciw przyprostokątnej a , kąt β leży naprzeciw przyprostokątnej b . Mierzmy linijką długości przyprostokątnej b i przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego dla kątów 10° , 20° , 30° , 40° , 50° , 60° , 80° , 90° . Otrzymane liczby wstawiamy do wzoru funkcji cosinus i obliczamy wartość funkcji cosinus dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji cosinus.

Polecenie 3

Zapoznaj się z poniższą animacją, która pokazuje, jak obliczamy tangensy kątów ostrych.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RTLhCipf1KqFT>

Podobienstwo trójkątów prostokątnych_atrapa_animacja_516

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje jak obliczyć tangens dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długość a, b i przeciwprostokątnej długość c. kąt alfa leży naprzeciw przyprostokątnej a, kąt beta leży naprzeciw przyprostokątnej b. Mierzymy linijką długości przyprostokątnych a i b trójkąta prostokątnego dla kątów 10 stopni, 20 stopni, 30 stopni, 40 stopni, 50 stopni, 60 stopni, 80 stopni, 90 stopni. Wstawiamy otrzymane liczby do wzoru funkcji tangens i obliczamy wartość funkcji tangens dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji tangens.