



Siatka graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Siatka graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

Źródło: Jerry Yan, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

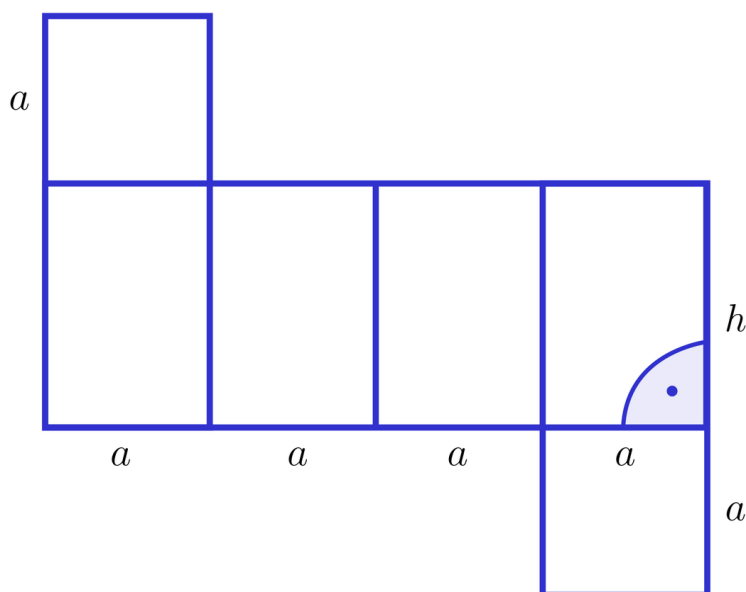
Wyobraźmy sobie ślimaka wolno pełzającego po powierzchni sześcianu. Aby przemieścić się w jak najkrótszym czasie przez wszystkie ściany sześcianu, zaczynając swą podróż i kończąc w tym samym punkcie, ślimak powinien wybrać jak najkrótszą drogę. Gdyby ślimak poruszał się po płaszczyźnie wybór byłby prosty – najkrótszą drogą między dwoma punktami płaszczyzny jest linia prosta. Gdy ślimak porusza się po innej powierzchni, wybór nie jest już tak oczywisty. Zatem, jaką drogę powinien wybrać ślimak?

Twoje cele

- Określisz siatkę graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.
- Znajdziesz najkrótsze drogi na powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.
- Poznasz praktyczne wykorzystanie zdobytej wiedzy.

Przeczytaj

Siatka graniastosłupa prawidłowego czworokątnego to figura płaska, którą otrzymuje się poprzez „rozcięcie” niektórych krawędzi graniastosłupa tak, aby ściany dały się rozłożyć na płaszczyźnie. Siatka odzwierciedla w rzeczywistych wymiarach ściany graniastosłupa oraz zawiera największą możliwą liczbę wspólnych krawędzi bryły.



Z powyższego rysunku, możemy zauważyć, że siatka graniastosłupa prawidłowego czworokątnego zbudowana jest z czterech przystających prostokątów (ścian bocznych graniastosłupa tworzących siatkę powierzchni bocznej graniastosłupa) o bokach długości a i h oraz dwóch przystających kwadratów (podstawa górna i dolna graniastosłupa) o boku długości a .

Rozwiązanie:

Przykład 1

Ocenimy, czy siatka **graniastosłupa prawidłowego czworokątnego** może zawierać:

a) 4 kwadraty o boku a oraz 2 prostokąty o bokach a i b

Rozwiązanie:

Zauważmy, że wybierając dwa kwadraty o boku a na górną i dolną podstawę graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, dwa pozostałe kwadraty oraz 2 prostokąty o bokach a i b będą tworzyć jego powierzchnię boczną. Nie są to figury przystające, więc

z podanych wielokątów nie możemy zbudować siatki graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

b) dokładnie 5 kwadratów o boku a

Rozwiązanie:

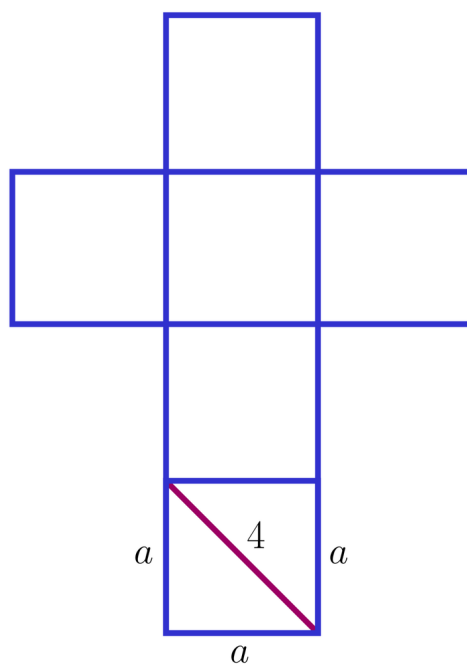
Siatka dowolnego graniastosłupa czworokątnego składa się z sześciu elementów. Zatem nie da się zbudować z podanych elementów graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

Przykład 2

Obliczymy pole powierzchni całkowitej graniastosłupów których siatki przedstawiają poniższe rysunki.

Rozwiązanie:

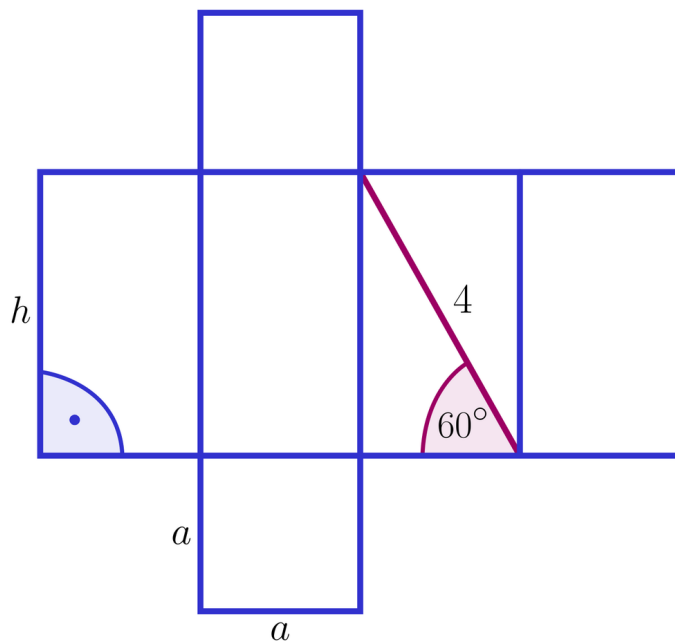
a) Rysunek przedstawia siatkę sześcianu.



Ze wzoru na przekątną kwadratu (ściany sześcianu) mamy $a\sqrt{2} = 4$.

Stąd wyliczamy długość krawędzi sześcianu $a = 2\sqrt{2}$. Zatem pole powierzchni $P_c = 6a^2 = 6 \cdot 8 = 48$.

b) Rysunek przedstawia siatkę graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.



Aby obliczyć pole powierzchni całkowitej znajdziemy długość krawędzi podstawy oraz długość wysokości.

Przekątna ściany bocznej ma długość 4 i jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem o mierze 60° . Mamy zatem $\sin 60^\circ = \frac{h}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, stąd $h = 2\sqrt{3}$.

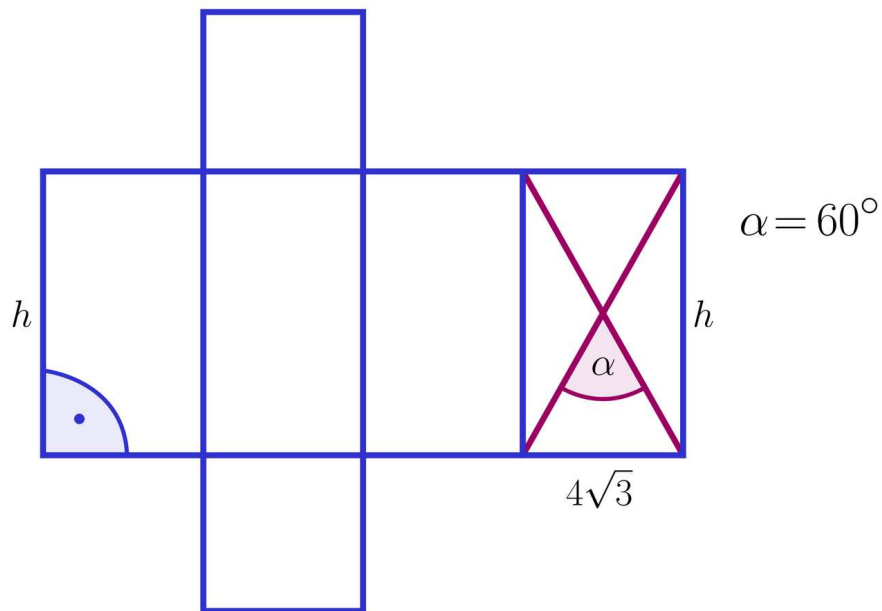
Obliczymy długość krawędzi podstawy. Mamy $\cos 60^\circ = \frac{a}{4} = \frac{1}{2}$, stąd $a = 2$.

Możemy obliczyć pole powierzchni całkowitej:

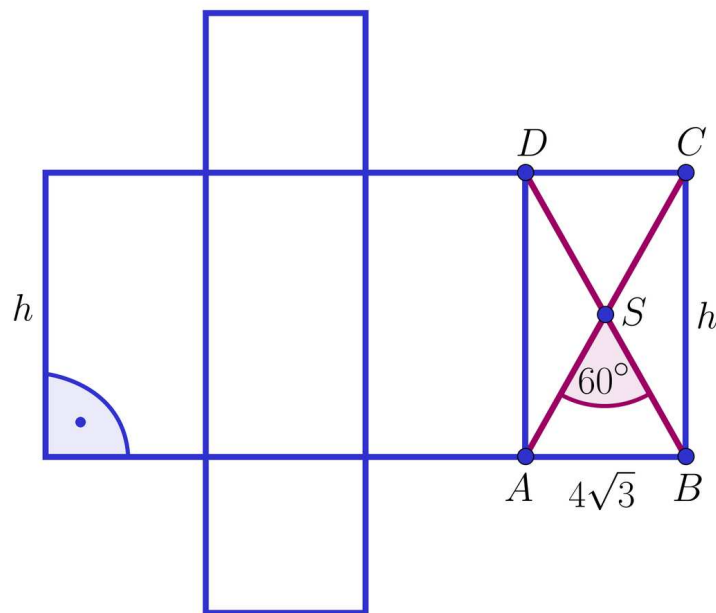
$$P_c = 2a^2 + 4ah = 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 8 + 16\sqrt{3}.$$

Przykład 3

Obliczymy **pole powierzchni** i **objętość** graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego siatkę przedstawia poniższy rysunek.



Rozwiązanie:



Rozważmy siatkę graniastosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku powyżej. Przekątne ściany bocznej, która jest prostokątem, przecinają się pod kątem ostrym o mierze 60° .

Trójkąt ABS jest trójkątem równoramiennym (w prostokącie przekątne są równe i dzielą się na połowy), zatem kąty $\sphericalangle SAB$ oraz $\sphericalangle SBA$ mają równe miary, po 60° .

Stąd trójkąt ASB jest nie tylko równoramienny, ale i równoboczny.

Zatem $|AS| = |BS| = |AB| = 4\sqrt{3}$.

Przekątne ścian bocznej, która jest prostokątem dzielą się na połowy, czyli $|BS| = |SD| = 4\sqrt{3}$, stąd $|BD| = 8\sqrt{3}$.

Korzystając z [twierdzenia Pitagorasa](#) dla trójkąta ABD możemy wyliczyć długość boku h , który jest również wysokością graniastoslupa:

$$h^2 = (8\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2 = 144, \text{ zatem } h = 12.$$

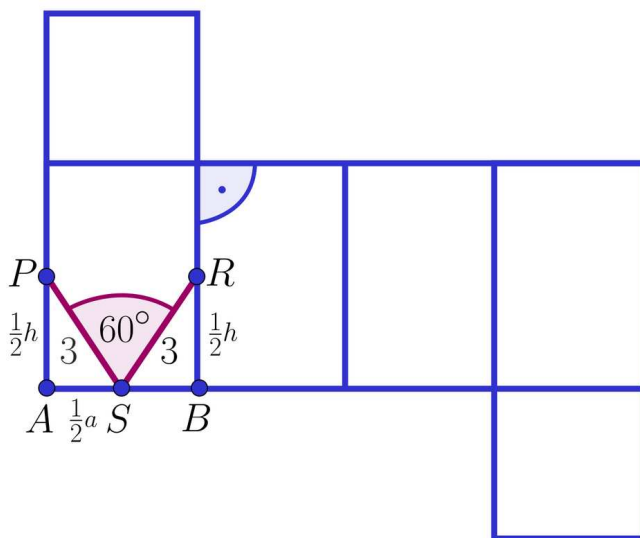
Możemy policzyć pole powierzchni całkowitej i [objętość graniastoslupa](#):

$$P_c = 2 \cdot (4\sqrt{3})^2 + 4 \cdot 12 \cdot 4\sqrt{3} = 96 + 192\sqrt{3},$$

$$V = (4\sqrt{3})^2 \cdot 12 = 576.$$

Przykład 4

Korzystając z danych przedstawionych na siatce graniastoslupa prawidłowego czworokątnego obliczymy jego pole powierzchni.



Rozwiązanie:

Z przedstawionego rysunku mamy:

$|PS| = |SR| = 3$ oraz kąty $\sphericalangle PSA$ i $\sphericalangle RSB$ są równe, bo trójkąty PAS i RBS są prostokątne i przystające.

Zatem $\sphericalangle PSA = \sphericalangle RSB = 60^\circ$.

Dla trójkąta PAS mamy $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}$, stąd $h = a\sqrt{3}$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PAS mamy:

$$\frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}a^2 = 9.$$

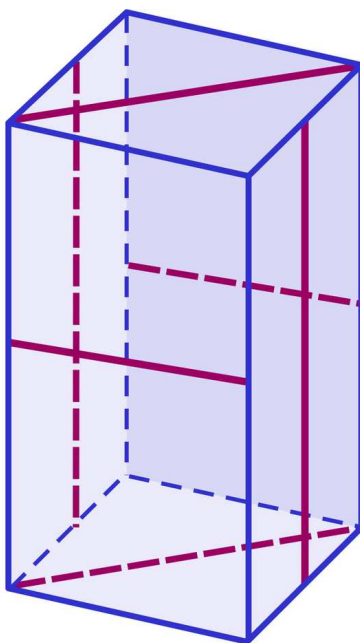
Podstawiając za $h = a\sqrt{3}$ otrzymujemy $\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = 9$, stąd $a^2 = 9$, czyli $a = 3$ i $h = 3\sqrt{3}$.

Możemy policzyć pole powierzchni całkowitej graniastosłupa:

$$P_c = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = 18 + 36\sqrt{3}.$$

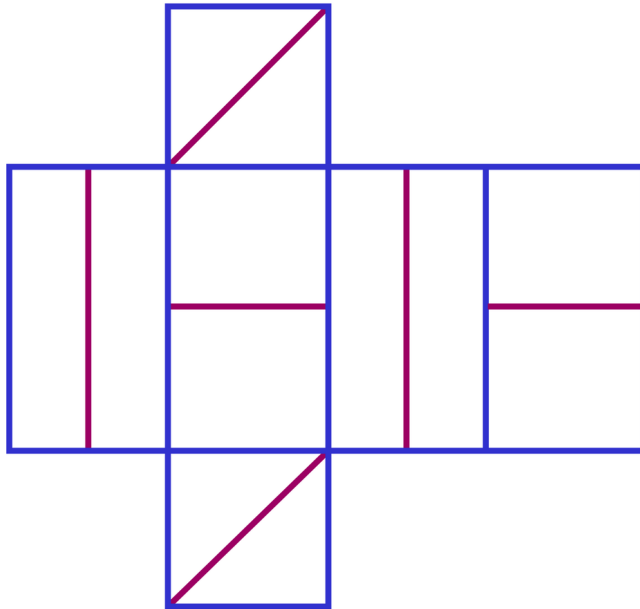
Przykład 5

Który z poniższych rysunków przedstawia siatkę z której można skleić **graniastosłup prawidłowy czworokątny** przedstawiony na poniższym rysunku.



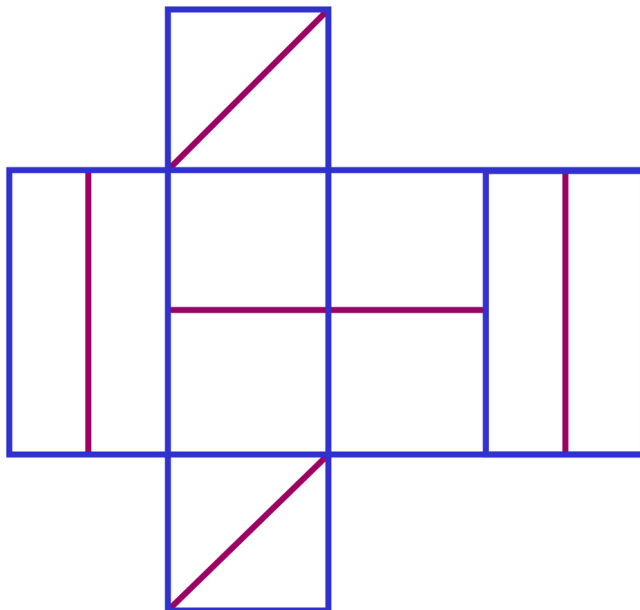
Rozwiązanie:

a)



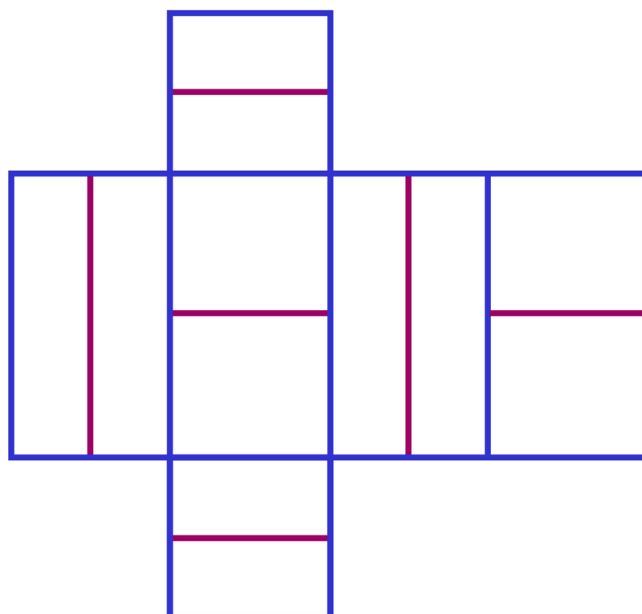
Rysunek przedstawia prawidłową siatkę. Odcinki na przeciwległych ścianach bocznych i podstawach są równoległe do siebie.

b)



Rysunek nie przedstawia prawidłowej siatki. Odcinki na przeciwległych ścianach bocznych nie są równoległe do siebie.

c)



Rysunek nie przedstawia prawidłowej siatki. Odcinki na przeciwległych ścianach bocznych są równoległe do siebie, ale odcinki na podstawach nie są równoległymi przekątnymi podstaw.

Słownik

graniastosłup prawidłowy czworokątny

jest to graniastosłup prosty, którego podstawą jest kwadrat

twierdzenie Pitagorasa

w dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta

objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

jest równa iloczynowi pola podstawy przez wysokość

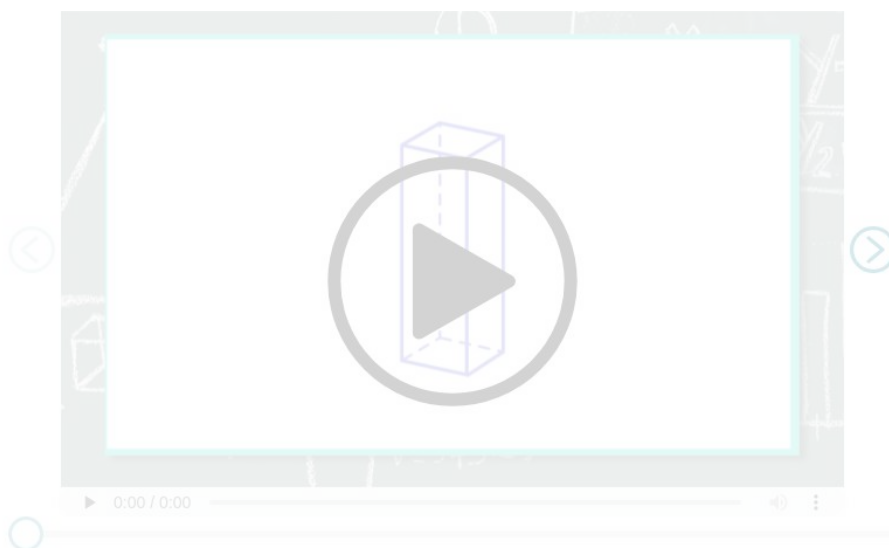
pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

jest równe sumie pól jego podstaw i pola powierzchni bocznej; pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe polu jego siatki

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

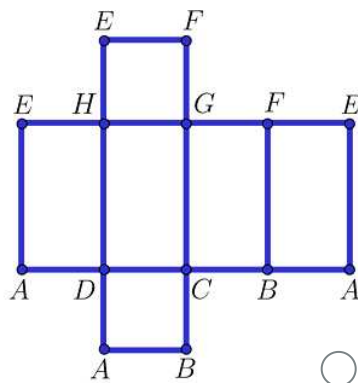
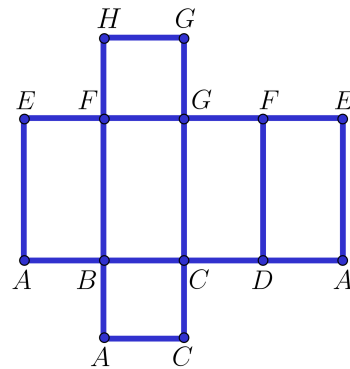
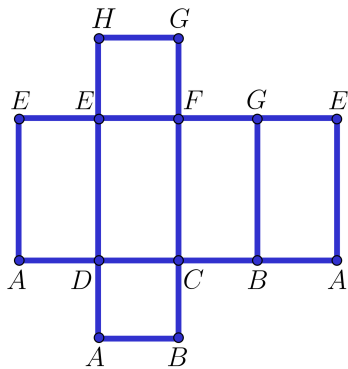
Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj polecenia zamieszczone poniżej.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DShM2TCWe>

Polecenie 2

W graniastopie prawidłowym czworokątnym kolejne wierzchołki oznaczono literami *ABCDEFGH*. Sytuację tę prawidłowo przedstawia rysunek?



Polecenie 3

Na podstawie informacji zawartych w prezentacji zaznacz czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Siatkę graniastopu prawidłowego czworokątnego można zbudować z dwóch kwadratów o boku 2 cm i czterech prostokątów o bokach 3 cm oraz 4 cm	☐	☐
Istnieje siatka graniastopu prawidłowego czworokątnego o wszystkich krawędziach równych 6 cm	☐	☐
Pole powierzchni całkowitej graniastopu prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 6 cm i przekątnej ściany bocznej 10 cm wynosi 264 cm^2	☐	☐
Pole powierzchni bocznej graniastopu prawidłowego czworokątnego o wysokości 4 cm oraz przekątnej ściany bocznej 8 cm wynosi $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$	☐	☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Określ czy podane stwierdzenie jest prawdziwe czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Siatka graniastostupa prawidłowego czworokątnego składająca się z 6 dowolnych kwadratów o boku a ma pole powierzchni całkowitej równe $6a^2$.	☐	☐
Siatka graniastostupa prawidłowego czworokątnego ma pole powierzchni równe 128 cm^2 . Wówczas pole powierzchni bocznej wynosi 96 cm^2 , jeżeli krawędź podstawy ma 4 cm .	☐	☐
Siatka graniastostupa prawidłowego czworokątnego może składać się z 4 przystających dowolnych czworokątów oraz 2 przystających kwadratów będących jego podstawami.	☐	☐
Przekątna ściany bocznej w graniastostupie prawidłowym czworokątnym, której jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego ma 4 cm . Zatem pole powierzchni bocznej tego graniastostupa wynosi 152 cm^2 .	☐	☐

Ćwiczenie 3



Uzupełnij podany tekst przeciągając w odpowiednie miejsca właściwy wyraz.

graniastopuła prawidłowego czworokątnego to , która powstaje poprzez "rozcięcie" niektórych krawędzi graniastopuła tak, aby dało się rozłożyć ściany na płaszczyźnie. graniastopuła prawidłowego czworokątnego składa się z , które są oraz będących jego ścianami bocznymi. Siatka składa się z 6 .

czterech przystających prostokątów

Pole powierzchni podstaw

Pole powierzchni bocznej

sześcianu

dwóch ścian bocznych

przystającymi kwadratami

Siatka

figura płaska

boków

4 przystających trójkątów

ścian

przystających kwadratów

trzech przystających prostokątów

Siatka

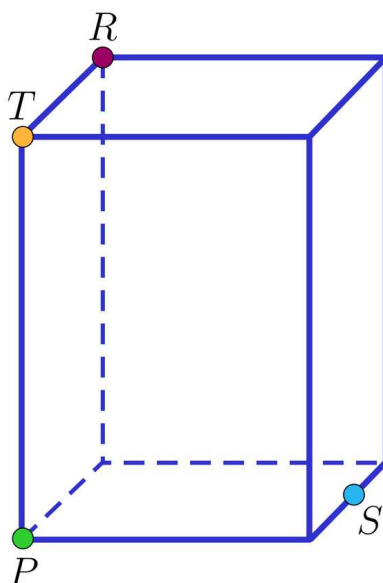
prostopadłościanu

dwóch podstaw

Ćwiczenie 4



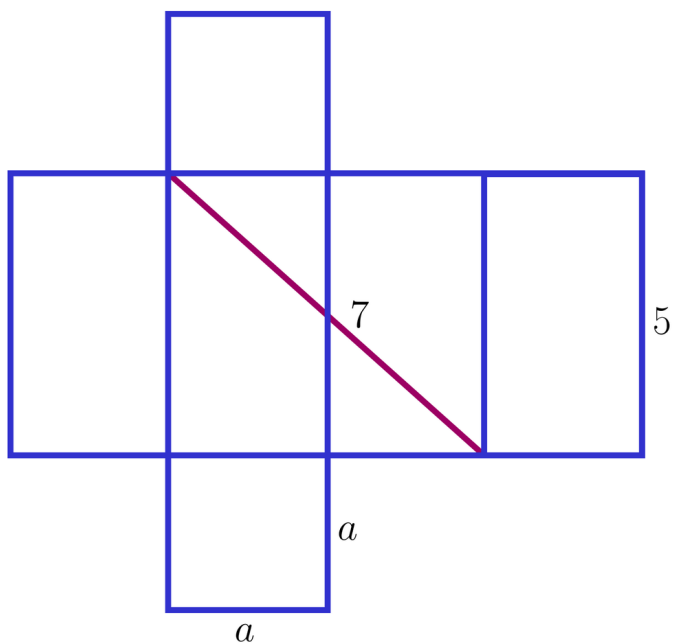
Na poniższym rysunku przedstawiono graniastopuła prawidłowy czworokątny. Narysuj siatkę graniastopuła prawidłowego czworokątnego, a następnie podpisz prawidłowo punkty odpowiadające punktom P , R , S , T . Pamiętaj, że jednemu punktowi na siatce graniastopuła mogą odpowiadać dwa punkty. Zaznacz je tą samą literą.



Ćwiczenie 5



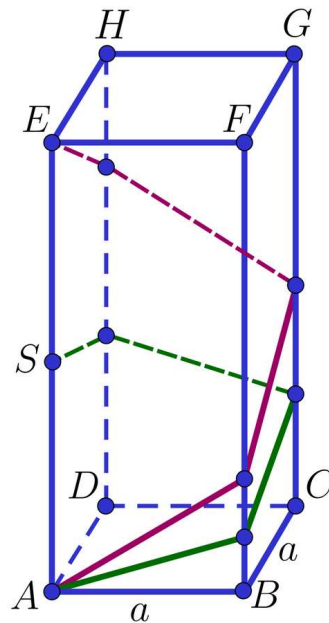
Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastopła prawidłowego czworokątnego, którego siatkę przedstawia poniższy rysunek.



Ćwiczenie 6



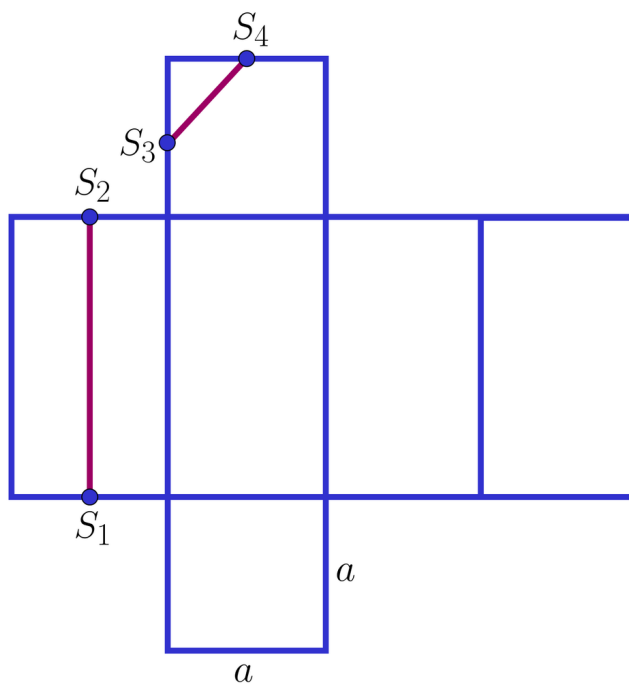
W graniastopie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy jest trzy razy krótsza od wysokości. Punkt S jest środkiem krawędzi bocznej tego graniastopu. Dwa ślimaki poruszają się po powierzchni graniastopu wzdłuż różowej ścieżki (od punktu E do punktu A) lub zielonej ścieżki (od punktu S do punktu A) jak na rysunku poniżej. Wyznamy długości ścieżek i określimy, który z nich dotrze do punktu A w krótszym czasie (zakładamy, że prędkość ruchu ślimaka jest stała).



Ćwiczenie 7



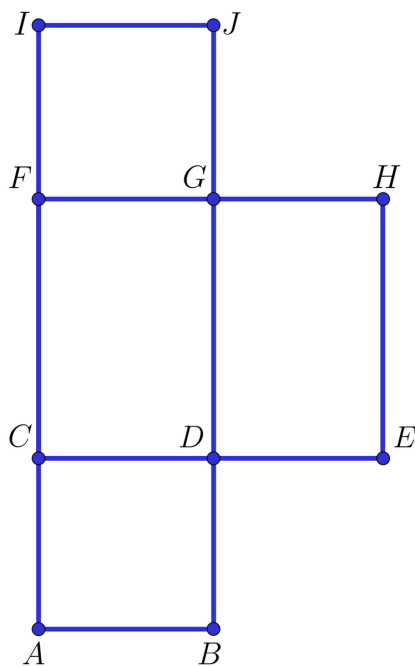
Na poniższym rysunku przedstawiono siatkę graniastostupa prawidłowego czworokątnego. Punkty S_n , $n = 1, 2, 3, 4$ są środkami krawędzi podstawy. Suma kwadratów długości odcinków S_1S_2 i S_3S_4 wynosi s^2 . Jakie wymiary ma graniastostup prawidłowy czworokątny, którego siatkę przedstawia poniższy rysunek, jeżeli jego pole powierzchni bocznej wynosi $2\sqrt{2}s^2$?



Ćwiczenie 8



Na rysunku poniżej przedstawiono niepełną siatkę pewnej bryły, złożoną z dwóch przystających prostokątów i dwóch kwadratów. Wiadomo, że w siatce brakuje dwóch ścian. Pole powierzchni bocznej tej bryły wynosi 96, a niektóre ściany mają pole powierzchni równe 9. Oblicz objętość tej bryły.



Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Niemczynowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Siatka graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

1. rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
2. rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
3. oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa siatkę graniastosłupa prawidłowego czworokątnego,
- znajduje najkrótsze drogi na powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego,
- praktycznie wykorzystuje wiedzę.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;

- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie przypominają sobie treści z poprzednich lekcji dotyczącymi graniastosłupów prawidłowych oraz ich pola powierzchni całkowitej.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji o temacie: „Siatka graniastosłupa prawidłowego czworokątnego”.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3 – 4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji „Prezentacja multimedialna”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie Polecenia 2, 3 z sekcji „Prezentacja multimedialna”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.

4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1 – 2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3 – 5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6 – 7 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Graniastosłup prosty i jego własności](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną można wykorzystać jako powtórzenie materiału oraz jako alternatywę rozwiązywania zadań dotyczących „Pola powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego”. Siatki wykorzystane w prezentacji multimedialnej przydadzą się w lepszym zrozumieniu lekcji „Graniastosłup prawidłowy czworokątny”.