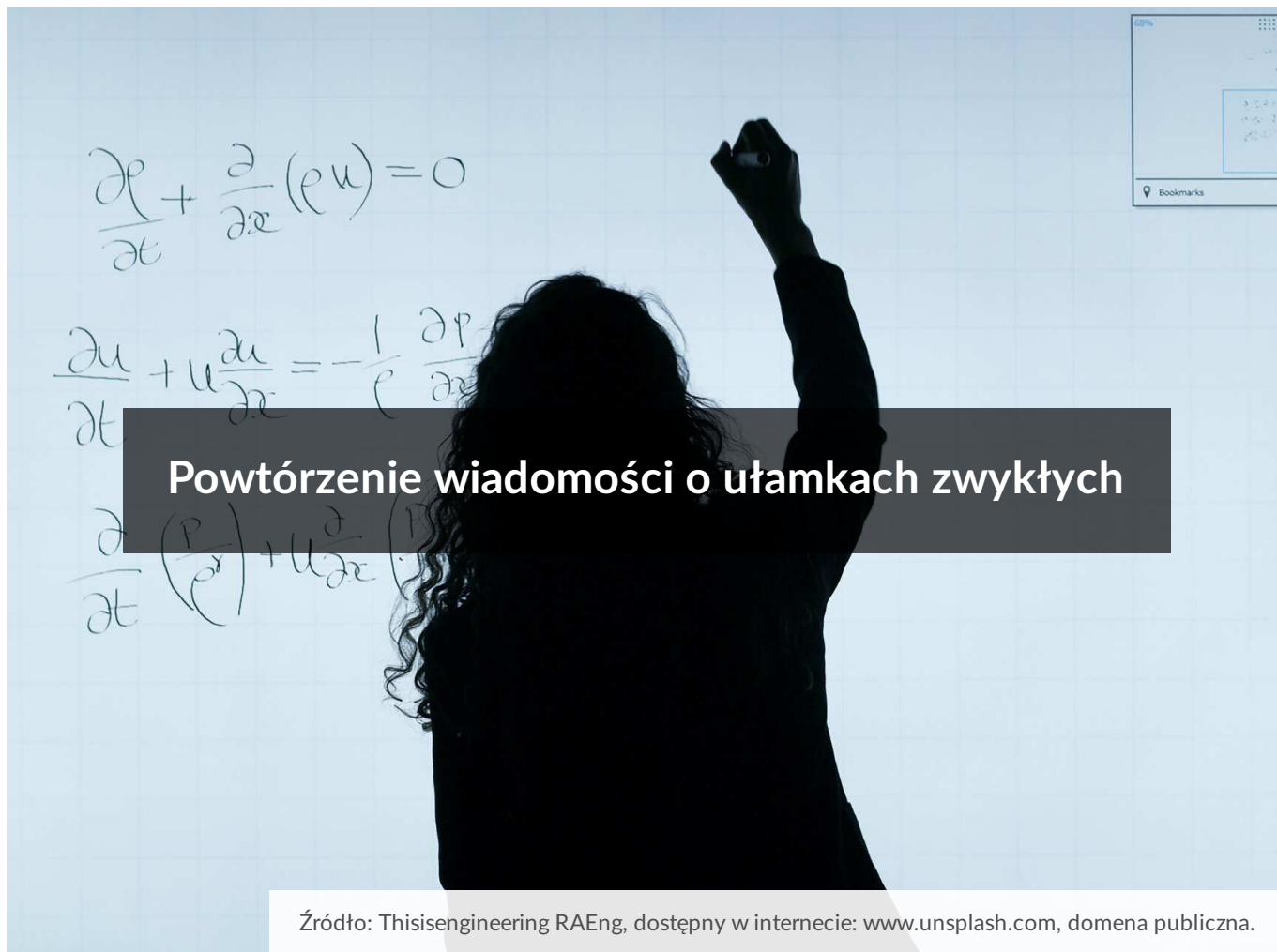




Powtórzenie wiadomości o ułamkach zwykłych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Matematyka jest nauką o liczbach, figurach geometrycznych i nieskończoności. Najprościej można uświadomić sobie ten fakt, spoglądając na oś liczbową. Z jednej strony jest to **obiekt geometryczny**, ponieważ oś liczbową rysujemy jako prostą (a więc figurę geometryczną) z zaznaczoną strzałką. Z drugiej strony przedstawione są na niej wszystkie **liczby**, które poznaje się podczas nauki w szkole. Ponadto oś liczbowa jest **nieskończona**.

Twoje cele

- Wykonasz działania na ułamkach zwykłych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie).
- Wskażesz:
 - nierówności,
 - ułamki większe lub mniejsze od wskazanej liczby.
- Uporządkujesz ułamki od największego do najmniejszego.
- Udowodnisz, że dana liczba jest odwrotnością innej, wskazanej liczby.

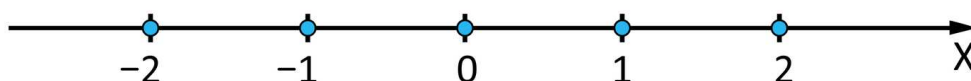
Przeczytaj

Punktom osi liczbowej odpowiada nieskończenie wiele **liczb naturalnych**:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

jak i **liczb całkowitych ujemnych**:

$$-1, -2, -3, -4, -5, \dots$$

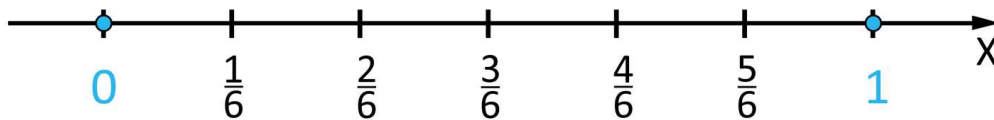


Ważne!

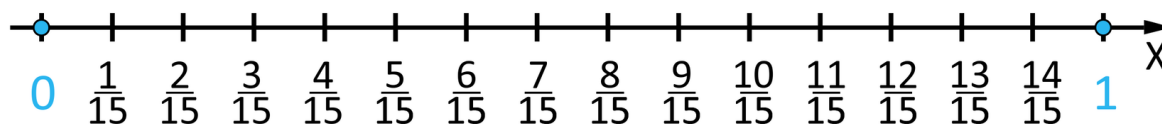
Liczbę 0 będziemy uważać za liczbę naturalną. Jest to jednak tylko kwestia umowy – w niektórych książkach można się spotkać z niezaliczaniem zera do liczb naturalnych.

Każdy odcinek prostej można dzielić na dowolnie małe części. Przykładowo, gdy podzielimy odcinek o końcach w punktach 0 i 1 na sześć równych części, to punkty podziału wypadną w liczbach:

$$0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6} \text{ oraz } 1.$$



Z kolei dzieląc ten sam odcinek na piętnaście równych części, wyróżnimy na osi jeszcze dłuższą serię liczb.



Ważne!

Ułamki o tych samych mianownikach łatwo się porównuje, np. $\frac{10}{15} < \frac{11}{15}$, $\frac{11}{15} < \frac{13}{15}$. Obie te nierówności możemy zapisać w formie tzw. **nierówności podwójnej**: $\frac{10}{15} < \frac{11}{15} < \frac{13}{15}$. Taki zapis wyraźnie pokazuje, że $\frac{11}{15}$ leży na osi liczbowej pomiędzy liczbami $\frac{10}{15}$ oraz $\frac{13}{15}$.

Widać teraz, że każdy odcinek o końcach będących liczbami całkowitymi można dzielić na dowolną liczbę równych części. A zatem liczb, które pojawią się wówczas jako punkty podziału, jest nieskończenie wiele. Każdą z nich zawsze można zapisać w postaci ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$ gdzie p oraz q są liczbami całkowitymi. Zbiór wszystkich ułamków zwykłych nazywamy także **zbiorem liczb wymiernych**.

Już wiesz

Ułamek, który jest mniejszy od 1 i większy od -1 , nazywamy ułamkiem właściwym.

Ułamek, który nie jest właściwy, czyli ułamek niewłaściwy, można zapisać albo jako liczbę całkowitą, albo w postaci sumy liczby całkowitej i ułamka właściwego.

Definicja: liczba wymierna

Liczba x jest liczbą wymierną, jeśli można ją przedstawić w postaci: $x = \frac{p}{q}$, czyli w postaci ułamka zwykłego, gdzie liczby p oraz q są liczbami całkowitymi, przy czym q jest różne od zera.

Przykład 1

Liczba $\frac{13}{25}$ jest liczbą wymierną.

Przykład 2

Liczba $2\frac{1}{3}$ jest liczbą wymierną, bowiem można ją zapisać w postaci ułamka zwykłego: $2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$.

Przykład 3

Każda liczba całkowita p jest liczbą wymierną, bo można ją zapisać w postaci ułamka zwykłego: $p = \frac{p}{1}$.

Uwaga!

Na osi liczbowej, oprócz liczb wymiernych, jest jeszcze nieskończenie wiele liczb niewymiernych, czyli takich, których nie można przedstawić w postaci ułamka zwykłego.

Dla zainteresowanych

Przykładem liczby niewymiernej jest $\sqrt{2}$. O liczbach niewymiernych można powiedzieć, że są położone na osi liczbowej w punktach, w które nigdy nie trafimy, dzieląc odcinek o całkowitych końcach na n równych części.

Wiesz już, jak należy wykonywać działania na liczbach wymiernych, rozszerzać i skracać ułamki, dodawać je, odejmować, mnożyć i dzielić. Nie ma zatem potrzeby, aby teraz uczyć się tego od nowa. Przypomnimy jedynie techniki, których w tych operacjach używamy.

Przykład 4

Ustalimy, która z liczb: $x = \frac{18}{27}$ oraz $y = \frac{24}{45}$ jest większa. Na początek zauważamy, że oba ułamki można **skrócić**:

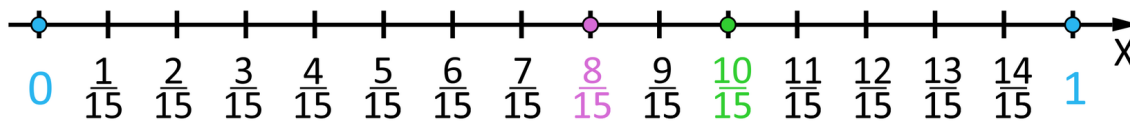
$$x = \frac{18}{27} = \frac{9 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{2}{3}, y = \frac{24}{45} = \frac{3 \cdot 8}{3 \cdot 15} = \frac{8}{15}.$$

Teraz wystarczy ułamki $x = \frac{2}{3}$ oraz $y = \frac{8}{15}$ **sprowadzić do wspólnego mianownika**.

Najmniejszym z nich jest liczba 15. Ułamek $x = \frac{2}{3}$ możemy teraz **rozszerzyć** następująco:

$$x = \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}.$$

Widać już, że $y < x$, gdyż $\frac{8}{15} < \frac{10}{15}$.



Ważne!

Zarówno liczby wymierne, jak i niewymierne są elementami zbioru **liczb rzeczywistych**. Zbiór ten można określić następująco: liczby rzeczywiste dodatnie to wszystkie możliwe długości odcinka, zaś liczby rzeczywiste ujemne to wszystkie liczby przeciwne do liczb rzeczywistych dodatnich. Zbiór liczb rzeczywistych to zbiór utworzony przez połączenie zbioru liczb rzeczywistych dodatnich i zbioru liczb rzeczywistych ujemnych.

Przykład 5

Obliczymy wartość wyrażenia $x = \left(\frac{3}{5} + 1\frac{3}{8}\right) : 3\frac{19}{20}$.

Najpierw zapisujemy liczby mieszane w postaci ułamków zwykłych:

$$x = \left(\frac{3}{5} + \frac{8+3}{8}\right) : \frac{60+19}{20} = \left(\frac{3}{5} + \frac{11}{8}\right) : \frac{79}{20}.$$

Dodajemy teraz ułamki w nawiasie, sprowadzając je do wspólnego mianownika, co

prowadzi do następującego wyniku: $x = \left(\frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} + \frac{11 \cdot 5}{8 \cdot 5}\right) : \frac{79}{20} = \frac{24+55}{40} : \frac{79}{20} = \frac{79}{40} : \frac{79}{20} = \frac{79}{40} \cdot \frac{20}{79} = \frac{1}{2}.$

W ostatnim przekształceniu skorzystaliśmy z tego, że dzielenie przez dany ułamek oznacza mnożenie przez jego odwrotność.

Słownik

liczba wymierna

liczba x jest liczbą wymierną, jeśli można ją przedstawić w postaci: $x = \frac{p}{q}$, czyli w postaci ułamka zwykłego, gdzie liczby p oraz q są liczbami całkowitymi, przy czym q jest różne od zera

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Aby powtórzyć wiadomości o ułamkach, zagraj w grę „ułamkowe sudoku”. Uzupełnij puste miejsca tak, by w zależności od wylosowanego polecenia sumy lub iloczyny kolumn i wierszy dawały określone wyniki.

Przeglądanie wiadomości o ułamkach zwykłych

Uzupełnij tabelki tak, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie iloczyn liczb był równy 1:

$1\frac{7}{15}$		
$4\frac{1}{10}$	$8\frac{17}{10}$	
	$4\frac{7}{10}$	

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DnoZzeZPE>

Polecenie 2

Uzasadnij, że liczba $\frac{7}{50}$ jest odwrotnością liczby $7\frac{1}{7}$.

Polecenie 3

Znajdź cztery różne liczby wymierne, leżące na osi liczbowej pomiędzy liczbami $x = \frac{7}{5}$ i $y = \frac{3}{2}$.

Polecenie 4

Ustal, jaka zależność łączy mianowniki dwóch ułamków, których liczniki są równe 1, jeżeli wiadomo, że różnica tych ułamków jest równa ich iloczynowi.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż prawdziwą nierówność.

☐ $4\frac{9}{10} > \frac{54}{11}$

☐ $\frac{7}{3} > 2\frac{1}{3}$

☐ $\frac{17}{4} > 5$

☐ $\frac{25}{9} > 2\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 2



Oblicz x , wiedząc, że $\frac{3}{10}x$ jest równe $1\frac{1}{8}$.

☐ $x = \frac{2}{3}$

☐ $x = \frac{15}{4}$

☐ $x = \frac{17}{4}$

☐ $x = \frac{4}{15}$

Ćwiczenie 3



Marek zbiera znaczki. W swojej kolekcji ma teraz 121 znaczków polskich, z czego 85 to znaczki o tematyce sportowej, oraz 239 znaczków zagranicznych, wśród których jest 70 znaczków o tematyce sportowej.

Znaczki polskie stanowią całej kolekcji.

Znaczki o tematyce sportowej stanowią całej kolekcji

$$\frac{85}{239}$$

$$\frac{121}{360}$$

$$\frac{31}{72}$$

$$\frac{36}{72}$$

Ćwiczenie 4



Pewnego roku dzień pierwszego kwietnia wypadł w sobotę. Jaką część wszystkich dni tego miesiąca stanowiły poniedziałki?

☐ $\frac{5}{31}$

☐ $\frac{2}{15}$

☐ $\frac{5}{30}$

☐ $\frac{4}{31}$

Ćwiczenie 5



Oblicz wyniki działań a następnie uporządkuj od najmniejszego do największego.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} \cdot \left(1 - \frac{3}{11}\right)$$



$$\left(\frac{7}{6} + \frac{13}{5}\right) : \left(2 - \frac{7}{60}\right)$$



$$\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{11}\right)$$



$$\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{9}\right) : 1\frac{8}{9}$$



Ćwiczenie 6



Na swoje urodziny Franek kupił ciasta: 40 dag czekoladowego, 40 dag orzechowego i 35 dag cytrynowego. Ciasto czekoladowe podzielił na sześć równych części, orzechowe - na osiem równych części, cytrynowe - na pięć równych części, a następnie zaprosił gości. Piotrek ma na swoim talerzu dwa kawałki ciasta, które razem ważą 12 dag, Ania ma trzy kawałki o łącznej wadze $\frac{1}{6}$ kg. Jakie ciasta ma na talerzu:

Ania:

☐ 1 orzechowe

☐ 1 czekoladowe

☐ 1 cytrynowe

☐ 2 orzechowe

☐ 2 czekoladowe

☐ 2 cytrynowe

Piotrek:

☐ 1 czekoladowe

☐ 2 czekoladowe

☐ 2 orzechowe

☐ 1 orzechowe

☐ 2 cytrynowe

☐ 1 cytrynowe

Ćwiczenie 7



Dodatnie liczby całkowite k oraz n zostały dobrane tak, że spełniona jest podwójna nierówność $\frac{2}{7} < \frac{k}{n} < \frac{3}{8}$. Wynika stąd, że różnica $n - k$ może być równa

☐ 207

☐ 189

☐ 171

☐ 185

Ćwiczenie 8

W wyrażeniu

$$w = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{63} - \frac{1}{64}$$

występują odwrotności kolejnych liczb naturalnych od 1 do 64, przy czym każde dwa sąsiednie wyrazy mają przeciwne znaki.

Wartość tego wyrażenia zapisano w postaci ułamka nieskracalnego.

Wynika stąd, że licznik tego ułamka dzieli się przez:

☐ 96

☐ 97

☐ 98

☐ 95

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Powtórzenie wiadomości o ułamkach zwykłych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykonuje działania na ułamkach zwykłych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie),
- porównuje ułamki zwykłe,
- udowadnia, że dana liczba jest odwrotnością innej, wskazanej liczby.

Strategie nauczania:

- strategia asocjacyjna;
- strategia problemowa.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- gra dydaktyczna.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Wspólnie na forum klasy omawiają pytania i problemy.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 z sekcji „Gra edukacyjna” – „Uzasadnij, że liczba $\frac{7}{50}$ jest odwrotnością liczby $7\frac{1}{7}$.”. Uczniowie zapoznają się z treścią zawartą w materiale, w razie wątpliwości zadają pytania nauczycielowi na forum klasy.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Działania na ułamkach zwykłych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Grę edukacyjną można wykorzystać do powtórzenia materiału o ułamkach zwykłych.