Jak wyznaczyć największą/najmniejszą wartość funkcji?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Galeria zdjęć interaktywnych
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Jak wyznaczyć największą/najmniejszą wartość funkcji?

Źródło: Luisella Planeta Leoni z Pixabay, domena publiczna.

Wiele problemów życia codziennego, jak choćby stworzenie najbardziej pojemnego pudełka z prostokątnego kartonu, daje się sprowadzić do znalezienia najmniejszej lub największej wartości funkcji. Obecnie skupimy się na metodzie służącej rozwiązaniu tego typu zadań. Poznamy również jej naturalne ograniczenia opierając się na nietrudnych przykładach.

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz ogólną metodę służącą wyznaczeniu ekstremów globalnych funkcji.
> - Wykorzystasz poznane wcześniej wyniki optymalizacji i rachunku różniczkowego.

Przeczytaj

Rozpoczniemy od przypomnienia kilku twierdzeń.

Twierdzenie: warunek konieczny dla istnienia ekstremum lokalnego

Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ posiada pochodną w punkcie $x \in (a, b)$. Jeżeli funkcja f przyjmuje ekstremum lokalne w x, to $f'(x) = 0$.

Twierdzenie: Weierstrassa

Funkcja ciągła $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ przyjmuje ekstrema globalne.

Na mocy twierdzenia Weierstrassa otrzymujemy, że problem znalezienia najmniejszej i największej wartości funkcji ciągłej $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ zawsze posiada rozwiązania. Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego stanowi z kolei nieocenioną pomoc w poszukiwaniu tych rozwiązań. Pokażemy to na kilku prostych przykładach

Przykład 1

Znajdziemy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ na przedziale $\langle 0, 4\rangle$ oraz wszystkie argumenty, w których wartości te są przyjmowane.

Rozwiązanie

Twierdzenie Weierstrassa zapewnia, że funkcja f osiąga swoje ekstrema. Jeżeli są one przyjmowane na przedziale $(0, 4)$, to pochodna funkcji f musi się tam zerować na mocy warunku koniecznego dla istnienia ekstremum lokalnego.

Policzmy zatem

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x - 1)(x - 3).$$

Ponieważ rozwiązaniami równania

$$f'(x) = 0$$

$$3(x - 1)(x - 3) = 0$$

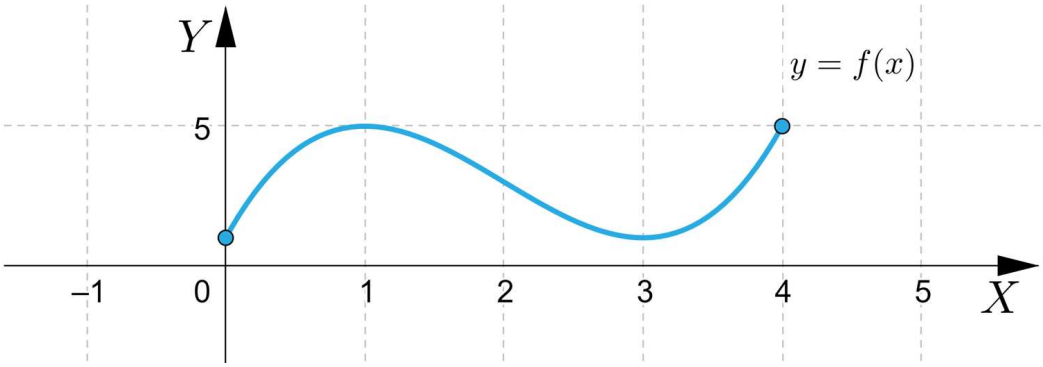
są liczby 1 i 3, więc jedynymi punktami, w których f może przyjmować ekstrema są 1 oraz 3.

Zauważmy dodatkowo, że do tej pory wyłączyliśmy z naszych rozważań punkty znajdujące się na brzegu przedziału, a więc punkty 0 i 4. Wystarczy zatem, że porównamy wartości funkcji f w punktach 0, 1, 3 i 4.

Policzmy więc

$f(0) = 1$, $f(1) = 5$, $f(3) = 1$, $f(4) = 5$.

Oznacza to, że 0 i 3 są argumentami minimum globalnego, zaś 1 i 4 są argumentami maksimum globalnego. Ponadto największą wartością jest 5, a najmniejszą 0. Na koniec przedstawimy wykres funkcji f na przedziale $\langle 0, 4 \rangle$.



Przykład 2

Znajdziemy ekstrema globalne funkcji $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ na przedziale $\langle 1, 3 \rangle$.

Rozwiązanie

Istnienie ekstremów globalnych zapewnia nam twierdzenie Weierstrassa. Rozpoczniemy od analizy na przedziale $(1, 3)$. W tym celu wyznaczymy miejsca, w których zeruje się pochodna funkcji f. Mamy

$f'(x) = 0$

$6x^2 + 6x = 0$

$6x(1 + x) = 0$

$x = 0 \notin (1, 3)$ lub $x = (-1) \notin (1, 3)$

Funkcja f nie przyjmuje zatem ekstremów na przedziale $(1, 3)$. Oznacza to, że ekstrema globalne funkcji f muszą być przyjmowane w punktach 1 oraz 3.

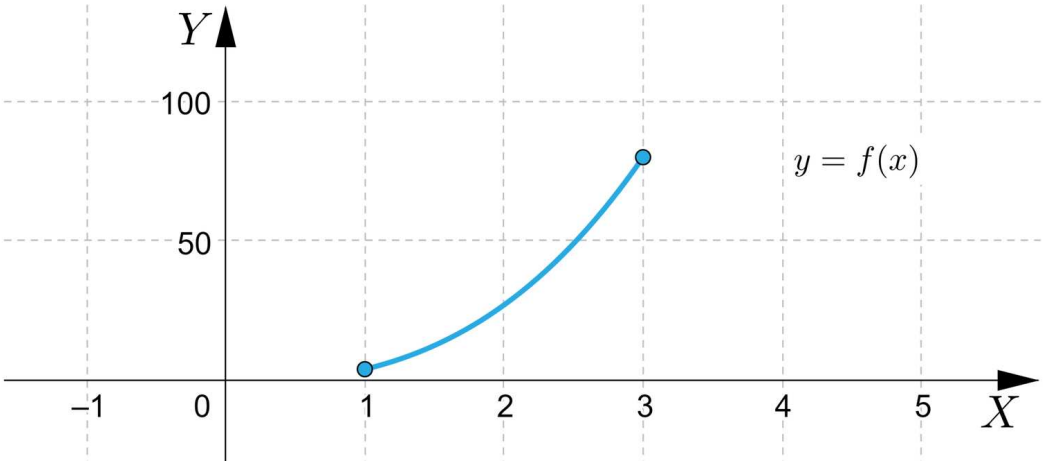
Prosty rachunek:

$f(1) = 4$

$f(3) = 80$

prowadzi nas do wniosku, że minimum globalnym funkcji f na przedziale $\langle 1, 3 \rangle$ jest 4, zaś jej maksimum na tym samym przedziale to 80.

O poprawności obliczeń przekonuje nas dodatkowo wykres funkcji f.



Przykład 3

Zajmiemy się teraz poszukiwaniem ekstremów funkcji $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 2x$ na przedziale $\langle -1, 1 \rangle$.

Rozwiązanie

Możemy się powołać na twierdzenie Weierstrassa, by mieć pewność, że poszukiwane punkty istnieją. Aby znaleźć rozwiązania na przedziale $(-1, 1)$ posłużymy się ponownie warunkiem koniecznym dla istnienia ekstremum lokalnego.

Obliczając pochodną funkcji f otrzymujemy

$$f'(x) = 10x^4 - 12x^2 + 2 = 2\left(5x^4 - 6x^2 + 1\right).$$

W celu znalezienia miejsc, w których zeruje się pochodna funkcji f rozważamy równanie

$$f'(x) = 0$$

$$2\left(5x^4 - 6x^2 + 1\right) = 0 \ \ |: 2$$

$$5x^4 - 6x^2 + 1 = 0.$$

Wykorzystamy podstawienie $t = x^2$, $t \geq 0$, aby uprościć powyższe równanie.

Otrzymujemy:

$$5t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$(5t - 1)(t - 1) = 0$$

$$t = \tfrac{1}{5} \text{ lub } t = 1.$$

Wracając do wyjściowej zmiennej, mamy

$t = \frac{1}{5}$ lub $t = 1$

$x^2 = \frac{1}{5}$ lub $x^2 = 1$

$x = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ lub $x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ lub $x = (-1)$ lub $x = 1$.

Zauważmy, że wartości (-1) oraz 1 muszą zostać odrzucone z naszych rozważań jako punkty spoza przedziału $(-1, 1)$.

Włączamy do naszej analizy (odrzucone przed chwilą) punkty na końcach przedziału i porównamy wartości funkcji f w punktach (-1), $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$ i 1.

Otrzymujemy kolejno:

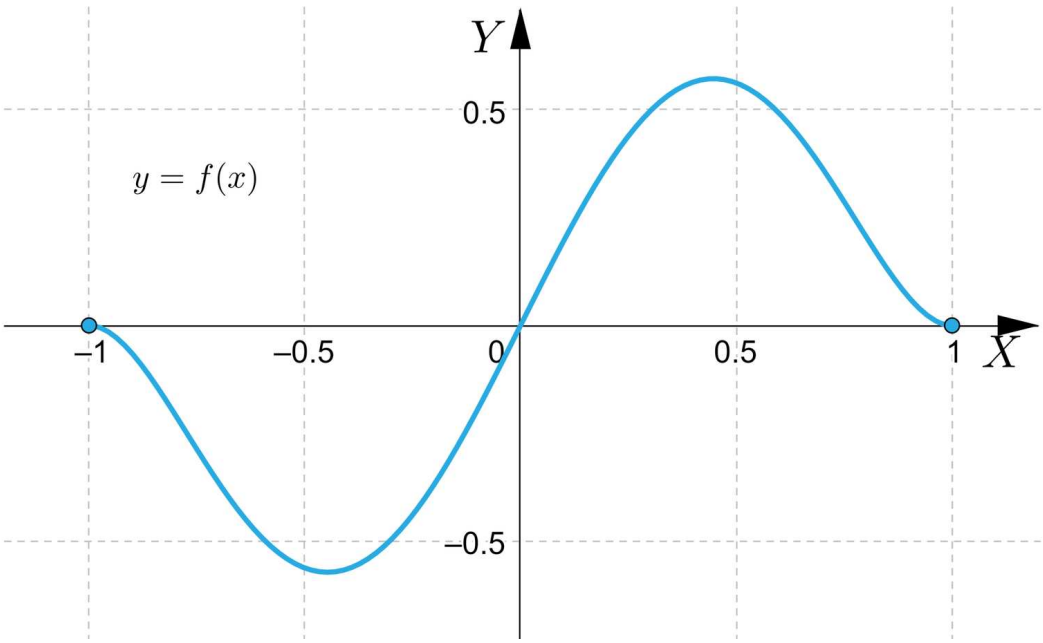
$f(-1) = 0$

$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \left(-\frac{32\sqrt{5}}{125}\right)$

$f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{32\sqrt{5}}{125}$

$f(1) = 0$

Ekstremami globalnymi funkcji f na przedziale $\langle -1, 1\rangle$ są więc $-\frac{32\sqrt{5}}{125}$ i $\frac{32\sqrt{5}}{125}$. Potwierdza to także wykres funkcji f sporządzony poniżej



Przejdziemy do analizy funkcji „klamerkowej”, gdyż daje się ją analizować w bardzo podobny sposób.

Przykład 4

Znajdziemy argumenty ekstremum globalnego funkcji $f : \langle -1, 2\rangle \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{dla } x \in \langle -1, 1) \\ x^2 + x - 2 & \text{dla } x \in \langle 1, 2\rangle \end{cases}$$

Rozwiązanie

Łatwo zauważyć, że w każdym punkcie różnym od 1 funkcja f jest ciągła. Pokażemy, że jest ona ciągła także w punkcie 1. Policzmy:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^3 - x\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(x^2 + x - 2\right) = 0,$$

$$f(1) = 0.$$

Ponieważ funkcja f jest ciągła oraz określona na przedziale domkniętym i ograniczonym możemy wykorzystać twierdzenie Weierstrassa, by przekonać się, że zadanie posiada rozwiązanie.

Znajdziemy najpierw najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale $\langle -1, 1\rangle$, a następnie poszukamy wszystkich ekstremów lokalnych funkcji f na przedziale $\langle 1, 2\rangle$. Funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $(-1, 1)$, więc aby znaleźć ekstrema lokalne na przedziale $(-1, 1)$ policzymy pochodną funkcji f na tym przedziale i przyrównamy ją do zera.

Mamy:

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Tym samym

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{ lub } x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Uwzględniając wartości funkcji f na końcach przedziału oraz w punktach, gdzie zeruje się pochodna funkcji f otrzymujemy

$$f(-1) = 0$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{27}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{3\sqrt{3}}{9} = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$f(1) = 0$$

Stąd największa wartość funkcji f na przedziale $\langle -1, 1\rangle$ jest przyjmowana w punkcie $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, zaś najmniejsza w punkcie $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Podobną analizę przeprowadzimy dla przedziału $\langle 1, 2\rangle$. Policzmy wpierw pochodną funkcji f na przedziale $(1, 2)$. Otrzymujemy:

$$f'(x) = 2x + 1,$$

a zatem

$$f'(x) = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

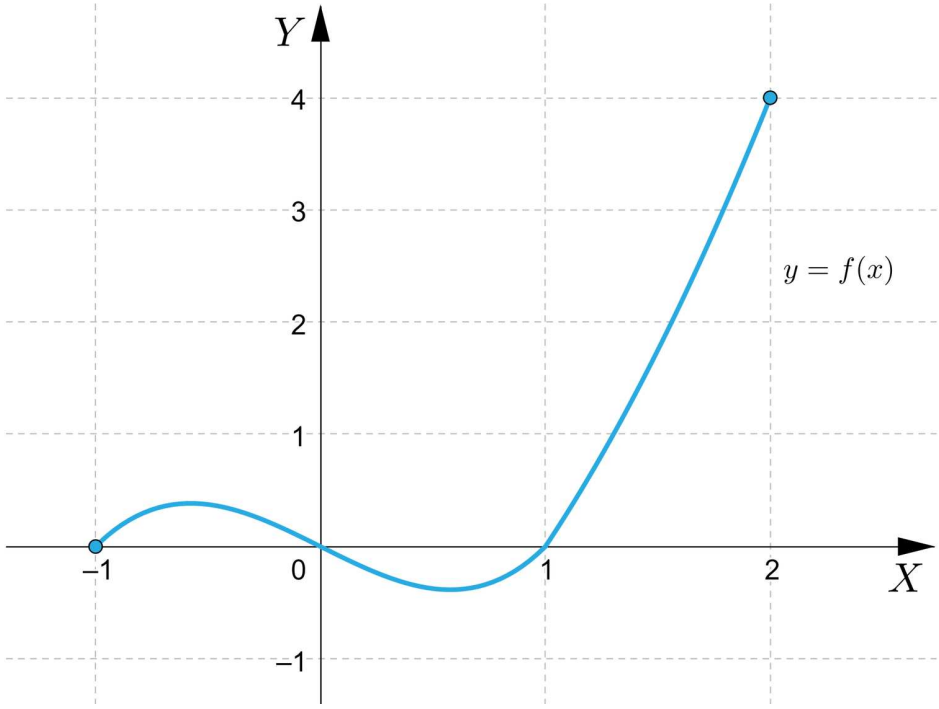
$$x = -\frac{1}{2} \notin (1, 2).$$

Funkcja f nie przyjmuje zatem ekstremów w żadnym punkcie przedziału $(1, 2)$. Wystarczy więc porównać wartości

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 4.$$

Najmniejsza wartość funkcji f na przedziale $\langle 1, 2\rangle$ jest przyjmowana w punkcie 1, zaś największa w punkcie 2. Ostatecznie, porównując największą wartość funkcji f na przedział $\langle -1, 1\rangle$ z jej największa wartością na przedziale $\langle 1, 2\rangle$ otrzymujemy, że argumentem ekstremum globalnego funkcji f na przedziale $\langle -1, 2\rangle$ jest 2. Z kolei porównując najmniejsze wartości funkcji f kolejno na przedziałach $\langle -1, 1\rangle$ i $\langle 1, 2\rangle$ jesteśmy w stanie łatwo zauważyć, że najmniejsza wartość funkcji f na przedziale $\langle -1, 2\rangle$ jest przyjmowana w $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Porównajmy dodatkowo otrzymane wyniki z wykresem funkcji.



Do tej pory wykorzystywaliśmy twierdzenie Weierstrassa, aby zapewnić, że problemy, które rozważamy posiadają rozwiązania. Samo poszukiwanie rozwiązań może się jednak odbywać w podobny sposób nawet, gdy założenia twierdzenia Weierstrassa nie są spełnione.

Przykład 5

Rozważmy funkcję f określoną wzorem $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-1}$.

Znajdziemy jej argumenty ekstremum globalnego na przedziale $(1, 5\rangle$, o ile te istnieją.

Rozwiązanie

Zauważmy wpierw, że funkcja f nie jest określona na przedziale domkniętym. Nie możemy więc skorzystać z twierdzenia Weierstrassa. Nie mamy tym samym pewności czy największa i najmniejsza wartość funkcji f istnieją. Zauważmy jednak, że funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $(1, 5)$. Oznacza to, że możemy wykorzystać warunek konieczny dla istnienia ekstremum lokalnego. Policzmy zatem:

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x-1)-(x^2-5x+6)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

i rozważmy równanie

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego x^2-2x-1 jest 8, a zatem rozwiązaniami powyższego równania są

$$x_1=\frac{2-\sqrt{8}}{2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}\notin(1,5) \text{ oraz } x_2=\frac{2+\sqrt{8}}{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}\in(1,5).$$

Otrzymujemy zatem

$$f\left(1+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-5\left(1+\sqrt{2}\right)+6}{1+\sqrt{2}-1}=2\sqrt{2}-3.$$

Ponieważ funkcja określona jest na przedziale prawostronnie domkniętym, możemy dołączyć wartość z prawego końca, tj. punktu 5. Mamy wtedy:

$$f(5)=\frac{3}{2}.$$

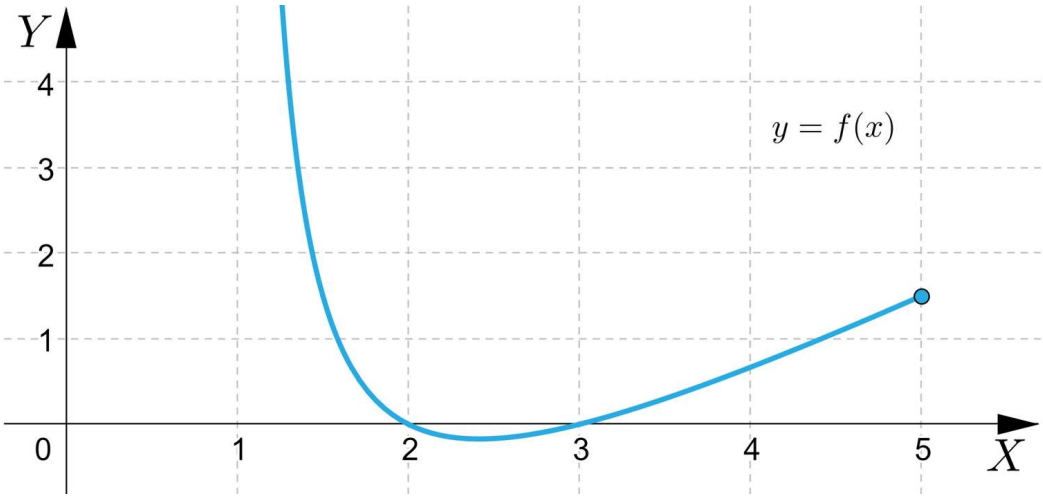
W przypadku lewego końca musimy postępować nieco inaczej niż poprzednio. Ponieważ funkcja f nie jest określona w punkcie 1, policzymy granicę w tym punkcie

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-5x+6}{x-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty.$$

Oznacza to, że funkcja f nie przyjmuje największej wartości na przedziale $(1,5\rangle$. Tym samym jedynym punktem podejrzanym o bycie argumentem ekstremum jest $1+\sqrt{2}$. Aby upewnić się, że ten punkt jest argumentem minimum prześledzimy zmienność funkcji f, badając znak jej pochodnej. Zauważmy, że wykorzystując powyższe obliczenie możemy otrzymać

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Mianownik jest dodatni dla każdego argumentu dziedziny. Licznik zaś jest funkcją kwadratową o pierwiastkach $1-\sqrt{2}$ oraz $1+\sqrt{2}$. Rysując wykres omawianego trójmianu kwadratowego zauważamy, że jest on ujemny na przedziale $\left(1,1+\sqrt{2}\right)$, zaś dodatni na przedziale $\left(1+\sqrt{2},5\right\rangle$. W konsekwencji pochodna f jest ujemna na przedziale $\left(1,1+\sqrt{2}\right)$, a dodatnia na $\left(1+\sqrt{2},5\right\rangle$. Oznacza to, że funkcja f maleje na przedziale $\left(1,1+\sqrt{2}\right)$, a następnie rośnie na przedziale $\left(1+\sqrt{2},5\right\rangle$. Możemy zatem narysować wykres funkcji f, by przekonać się, że funkcja f istotnie przyjmuje minimum w punkcie $1+\sqrt{2}$.



Zakończymy dość prostym przykładem, który pokazuje kolejne trudności związane z poszukiwaniem ekstremów funkcji, która nie spełnia założeń twierdzenia Weierstrassa.

Przykład 6

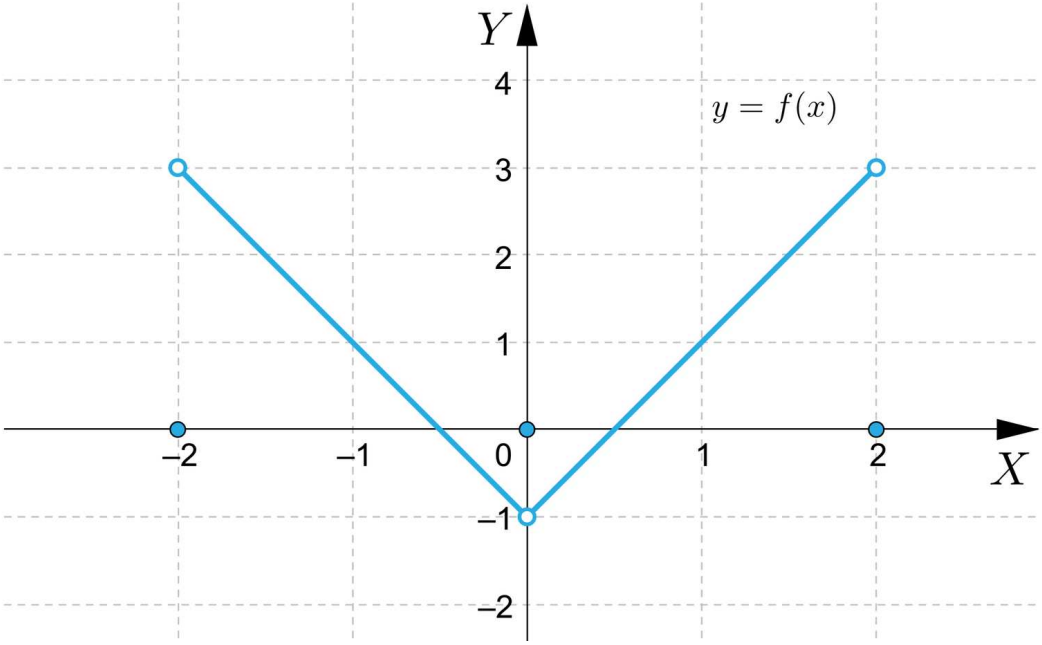
Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \{-2, 0, 2\} \\ -2x - 1 & \text{dla } x \in (-2, 0) \\ 2x - 1 & \text{dla } x \in (0, 2) \end{cases}.$$

Sprawdzimy czy funkcja f posiada ekstrema globalne.

Rozwiązanie

Funkcja f jest różniczkowalna na przedziałach $(-2, 0)$ oraz $(0, 2)$. Co więcej $f'(x) = (-2)$ dla $x \in (-2, 0)$ oraz $f'(x) = 2$ dla $x \in (0, 2)$. Nie istnieje więc żadne minimum ani maksimum lokalne na przedziałach $(-2, 0)$ ani $(0, 2)$. Gdyby funkcja f była ciągła, wystarczyłoby rozważyć punkty (-2), 0 i 2. Co więcej, jeden z tych punktów musiałby być punktem minimum funkcji f na przedziale $\langle -2, 2 \rangle$, zaś drugi punktem maksimum. Rysując wykres funkcji f przekonujemy się jednak łatwo, że funkcja f nie jest ciągła.



Widzimy także, że funkcja f nie posiada ekstremów na przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.

Widzimy zatem, że badanie ekstremów funkcji jest możliwe także w sytuacji, gdy nie spełnia ona założeń twierdzenia Weierstrassa. Jest to jednak wówczas zdecydowanie bardziej skomplikowane i wymaga od nas większej uwagi.

Słownik

argument minimum globalnego funkcji

element dziedziny, w którym funkcja przyjmuje najmniejszą wartość

argument maksimum globalnego funkcji

element dziedziny, w którym funkcja przyjmuje największą wartość

argument ekstremum globalnego funkcji

argument minimum lub maksimum globalnego

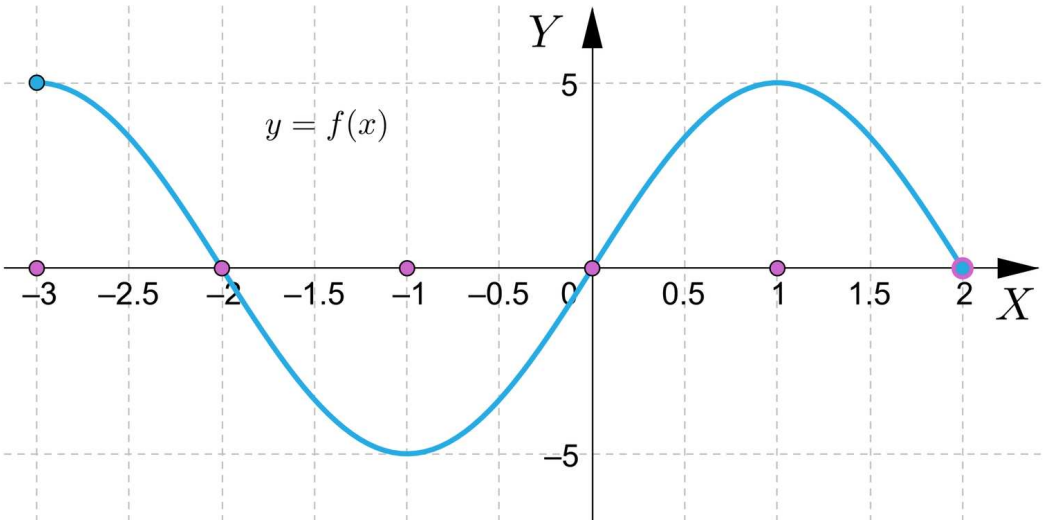
Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Dziedzina funkcji, jej ciągłość oraz różniczkowalność mają kluczowe znaczenie dla problemów optymalizacyjnych. Przekonamy się o tym poszukując ekstremów globalnych kolejno prezentowanych funkcji.

Polecenie 2

Spośród wyróżnionych argumentów wybierz argumenty minimum globalnego oraz argumenty maksimum globalnego.



Na podstawie wykresu zaznacz ekstrema globalne funkcji f.

argument, w którym przyjmowane jest minimum globalne	argument, w którym przyjmowane jest maksimum globalne
-3 ☐	-3 ☐
-2 ☐	-2 ☐
-1 ☐	-1 ☐
0 ☐	0 ☐
1 ☐	1 ☐
2 ☐	2 ☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^3 + x^2 - x$ na przedziale $\langle -2, 2 \rangle$, to:

- 10
- -2
- $-\frac{5}{27}$

Ćwiczenie 2

W poniższych tabelach przedstawiono kolejne kroki rozwiązania zadania. Dopasuj odpowiednie rozwiązanie do opisu.

Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $2x^3 + y^3$, jeśli spełnione są warunki: $x + y = 1$ oraz $x \in ”\langle”-1, 1”\rangle”$.

Wyznaczmy wartość y w zależności od x., Budujemy funkcję $f(x)$ podstawiając wyznaczony y do wyjściowego wyrażenia., Obliczamy pochodną funkcji f., $y = 1 + x$, $y = x$, $f(x) = x^3 + 1$, $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1$, $f'(x) = 3x^2 + 3x - 3$, $f'(x) = 3x^2 + 3x - 1$

Opis działania		Rozwiązanie
Wyznaczmy wartość y w zależności od x.		
Budujemy funkcję $f(x)$ podstawiając wyznaczony y do wyjściowego wyrażenia.		
Obliczamy pochodną funkcji f.		

Miejsce zerowe pochodnej funkcji f , które należy do dziedziny, to:

- $\sqrt{2} + 1$
- $-\sqrt{2} - 1$
- $-\sqrt{2} + 1$
- $\sqrt{2} - 1$

Zachodzą równości

$f(-1)$, $f(1)$, $f\left(\sqrt{2}-1\right)$, Najmniejsza wartość funkcji f to, $2\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, $1-3\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, $1-3\sqrt{2}$

$f(x)$	y	
$f(-1)$		
$f(1)$		
$f\left(\sqrt{2}-1\right)$		
Najmniejsza wartość funkcji f to		

Ćwiczenie 3

Rozważmy funkcję $f(x)=x^4+\frac{2}{3}x^3-x^2+1$. Wskaż jej wartość największą i najmniejszą na zadanych przedziałach.

$"\langle"-3,-2"\rangle"$, $"\langle"-2,\frac{1}{3}"\rangle"$, $"\langle"-\frac{1}{2},\frac{1}{4}"\rangle"$, $"\langle"-3,3"\rangle"$, $"\langle"0,1"\rangle"$

Przedział		Wartość największa		Wartość najmniejsza
$"\langle"-3,-2"\rangle"$				
$"\langle"-2,\frac{1}{3}"\rangle"$				
$"\langle"-\frac{1}{2},\frac{1}{4}"\rangle"$				
$"\langle"-3,3"\rangle"$				
$"\langle"0,1"\rangle"$				

Ćwiczenie 4

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne o sumie długości krawędzi równej 200, w które można włożyć kulę o promieniu 5. Wyznacz takie długości krawędzi, dla których objętość graniastosłupa jest największa.

Oznaczmy jako a krawędź podstawy graniastosłupa i jako b jego wysokość. Z treści zadania mamy, że $2a + b =$ ____. Dodatkowo każda z wartości a i b musi być nie mniejsza niż ____. Tym samym a musi być nie większe niż ____ a b musi być nie większe niż ____. Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wyraża się wzorem $V =$ ____, więc możemy zapisać funkcję zmiennej a: $V(a) =$ ____.
Pochodna tej funkcji, $V'(a)$, wyraża się wzorem: ____. Jedyne miejsce zerowe, które należy do dziedziny, to $a_0 =$ ____.

Obliczmy następujące wartości: $V(10) =$ ____, $V(20) =$ ____, $V\left(\frac{50}{3}\right) =$ ____.
Widzimy stąd, że największa możliwa objętość graniastosłupa osiągana jest, gdy $a =$ ____ oraz $b =$ ____, czyli gdy rozważany graniastosłup jest ____.

$a^2(50-a)$ | 50 | 200 | 190 | $\frac{50}{3}$ | $100a - 3a^2$ | 100 | ab^2 | $a(50-2a)$
a^2b | 30 | 20 | prostopadłościanem | 4000 | $\frac{50}{3}$ | 3000 | $a^2(50-2a)$ | $\frac{50}{3}$
10 | 5 | sześcianem | $\frac{125000}{27}$ | $100a - 6a^2$

Ćwiczenie 5

Rozważmy wszystkie trapezy, których podstawy i wysokość są nie krótsze niż 1. Podstawy mają długości: $-x^2 + 4x$ oraz $-x + 9$ a wysokość ma długość x. Znajdź taką długość x, dla której pole trapezu jest największe i taką długość x, dla której pole jest najmniejsze.

Ćwiczenie 6

Rozważmy graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości a i wysokości b. Niech k oznacza sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa, P oznacza jego pole powierzchni całkowitej a V jego objętość. Przyporządkuj odpowiednie funkcje do założeń. Znajdź argument, dla którego każda z funkcji przyjmuje wartość najmniejszą. Wyciągnij wnioski.

$k = 72$

$V = 216$

$P = 216$

$P(a) = -6a^2 + 72a$

$V(a) = -\frac{1}{2}a^3 + 54a$

$k(a) = 8a + \frac{864}{a^2}$

$P(a) = 2a^2 - \frac{864}{a}$

$k(a) = 8a + \frac{864}{a^2}$

$V(a) = -2a^3 + 18a^2$

Ćwiczenie 7

Wykaż, że równanie $x^3 - \sqrt{2}x^2 - 3x + 4,2 = 0$ ma rozwiązanie należące do przedziału $\langle 1, 2 \rangle$.

Ćwiczenie 8

Rozważmy funkcję $f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x, & \text{gdy } x \neq 0 \\ 40, & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$. Wiedząc, że dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle -2, 4 \rangle$ wskaż wszystkie prawdziwe równości.

- [ ] $f_{max} = 34$
- [ ] $f_{min} = -22$
- [ ] $f_{min} = -6$
- [ ] $f_{max} = 40$
- [ ] $f_{max} = 40,5$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Bełdziński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak wyznaczyć największą/najmniejszą wartość funkcji?

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza ekstrema globalne funkcji,
- wykorzystuje wyniki optymalizacji i rachunku różniczkowego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- pokaz;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Jak wyznaczyć największą/najmniejszą wartość funkcji?" oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj" i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych". Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki" i „ożywia się" tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Jak wyznaczyć największą/najmniejszą wartość funkcji?").

Materiały pomocnicze:

- Związek pochodnej z ciągłością funkcj

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Jak wyznaczyć największą/najmniejszą wartość funkcji?”.