



## Potęga o wykładniku wymiernym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Potęga o wykładniku wymiernym

Źródło: dostępny w internecie: [www.pixabay.com](http://www.pixabay.com).

W tej lekcji zdefiniujemy potęgi o wykładnikach wymiernych. W tym celu wykorzystamy własności potęg, które zdążyliśmy poznać dotychczas. Trudno sobie wyobrazić bazując jedynie na intuicji, jakie wartości mogłyby przyjąć potęgi takie jak  $3^{\frac{1}{2}}$  czy  $5^{\frac{2}{3}}$ . Po raz kolejny potrzebna będzie formalna definicja będąca konsekwencją wcześniej przyjętych własności.

### Twoje cele

- Zastosujesz definicję potęgi o wykładniku wymiernym.
- Zastosujesz definicje pierwiastków różnych stopni do wykonywania obliczeń.

# Przeczytaj

Chcielibyśmy, aby stosowane do tej pory własności działań na potęgach były uniwersalne dla wszystkich wykładników – nie tylko naturalnych czy całkowitych.

## Ważne!

Wśród znanych nam już własności znajduje się taka, która orzeka, że iloczyn potęg o tych samych podstawach jest równy potędze, której podstawą jest podstawa czynników, zaś wykładnik jest równy sumie wykładników czynników (czyli dla  $a > 0$  zachodzi  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ).

Rozważmy liczbę  $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$ .

Zgodnie ze wspomnianą powyżej własnością zachodzi  $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 3^1 = 3$

Ale prawdą jest też,  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ .

Ponieważ chcielibyśmy, aby równanie  $x^2 = 3$  miało jedno rozwiązanie dodatnie, a obie liczby  $\sqrt{3}$  i  $3^{\frac{1}{2}}$  są dodatnie i to równanie spełniają, więc przyjmujemy  $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ .

Analogicznie chcielibyśmy, aby równanie  $x^3 = 2$  miało jedno rozwiązanie.

Okazuje się, że spełniają je liczby  $\sqrt[3]{2}$  (bo  $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$  oraz  $2^{\frac{1}{3}}$  (bo  $(2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 2^1 = 2$ ).

Przyjmujemy więc, że  $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ .

Oba przykłady są szczególnymi przypadkami potęgi o wykładniku będącym odwrotnością liczby naturalnej, którą definiujemy jak następuje:

Jeśli  $a \geq 0$  oraz  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , to  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ .

## Przykład 1

Obliczmy wartości potęg:

$$81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$$

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$$

Ponieważ chcemy, żeby wszystkie poznane dotąd własności działań na potęgach były prawdziwe, więc aby obliczyć wartości potęg o wykładnikach będących liczbami wymiernymi, ale bardziej skomplikowanymi niż odwrotności liczb naturalnych, możemy postąpić jak poniżej.

### Przykład 2

Obliczymy wartość potęgi  $8^{\frac{2}{3}}$ .

Korzystając z własności potęgowania, która orzeka, że dla dowolnej liczby nieujemnej  $a$  i liczb całkowitych  $k$  i  $m$  zachodzi

$$(a^k)^m = a^{k \cdot m}$$

przekształcamy:

$$8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3} \cdot 2} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$$

### Ważne!

Potęę o nieujemnej podstawie  $a$  i wykładniku  $\frac{k}{m}$ , gdzie  $k$  i  $m$  są liczbami naturalnymi, przy czym  $m > 1$  definiujemy wzorem:

$$a^{\frac{k}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^k$$

### Przykład 3

Obliczymy wartości **potęg o wykładniku wymiernym dodatnim**:

$$81^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$$

$$32^{\frac{2}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$32^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$32^{\frac{4}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^4 = 2^4 = 16$$

$$\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{9}{25}}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

$$\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{9}{25}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{81}{625}} = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{625}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{5\sqrt[3]{5}} \text{ możemy jeszcze usunąć niewymierność}$$

z mianownika rozszerzając ułamek przez  $\sqrt[3]{25}$ :  $\frac{3\sqrt[3]{3}}{5\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{3\sqrt[3]{75}}{5 \cdot 5} = \frac{3\sqrt[3]{75}}{25}$

Ponieważ każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka zwykłego na nieskończenie wiele sposobów, rodzi się wątpliwość, czy każda z tych postaci da taką samą wartość potęgi.

Na przykład prawdą jest, że  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$

Ale czy  $2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{3}{9}} = 2^{\frac{4}{12}} = \dots$ ?

Dowodzi się, że tak rzeczywiście jest. O ile pamiętamy, że podstawą potęgi o wykładniku wymiernym może być tylko *liczba nieujemna*, można wybrać dowolną spośród wszystkich postaci wykładnika reprezentujących tę samą liczbę wymierną, ale trzymamy się zasady, że wybieramy najprostszą z nich, tzn. ułamek nieskracalny.

W przykładzie powyżej wybierzemy  $2^{\frac{1}{3}}$ .

### Ciekawostka

Zbadajmy jeszcze, do czego prowadziłyby możliwość obliczania potęg o wykładniku wymiernym i podstawie będącej liczbą ujemną.

Rozważmy ciąg następujących równości:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Gdybyśmy w definicji potęgi o wykładniku wymiernym dopuścili, aby podstawa potęgi była liczbą ujemną, musielibyśmy zrezygnować z własności potęgowania... albo pogodzić się z faktem, że  $-1 = 1$  i wszystkimi konsekwencjami tej równości.

Dużo bardziej sensowne i praktyczne wydaje się przyjęcie ograniczenia, że podstawą potęgi o wykładniku wymiernym może być tylko liczba nieujemna.

Jeżeli dopuścimy, aby wykładnik potęgi mógł być liczbą ujemną, potrzebne jest mocniejsze założenie: w takim przypadku podstawa potęgi musi być liczbą dodatnią.

### Ważne!

Dla  $a > 0$  oraz liczb naturalnych  $k$  i  $m$ , gdzie  $m > 1$  definiujemy potęgę o wykładniku wymiernym ujemnym następującym wzorem:

$$a^{-\frac{k}{m}} = \frac{1}{(\sqrt[m]{a})^k} = \left(\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\right)^k$$

### Przykład 4

Obliczymy wartości **potęg o wykładniku wymiernym ujemnym**:

$$0,125^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{\frac{81}{16}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3,375$$

### Już wiesz

Dla porządku przypomnimy własności potęgowania, które przenoszą się z potęg o wykładnikach całkowitych na potęgi o wykładnikach wymiernych.

Jeśli  $a$  i  $b$  są liczbami dodatnimi, zaś  $p$  i  $q$  są liczbami wymiernymi, to:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$$

$$a^p : b^p = (a : b)^p$$

Stosowanie wymienionych powyżej własności będziemy doskonalić w następnej lekcji.

## Słownik

### potęga o wykładniku wymiernym dodatnim

potęgą o nieujemnej podstawie  $a$  i wykładniku wymiernym  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p$  i  $q$  są liczbami naturalnymi, przy czym  $q > 1$ , nazywamy liczbę  $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$

### potęga o wykładniku wymiernym ujemnym

potęgą o dodatniej podstawie  $a$  i wykładniku wymiernym  $-\frac{p}{q}$ , gdzie  $p$  i  $q$  są liczbami naturalnymi, przy czym  $q > 1$ , nazywamy liczbę  $a^{-\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{\frac{1}{a}}\right)^p = \frac{1}{(\sqrt[q]{a})^p}$

# Film samouczek

## Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w filmie samouczku.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D8RbMndKI>

Film nawiązujący do treści materiału

## Polecenie 2

Na podstawie informacji zawartych w animacji oblicz wartości potęg. Wpisz poprawne liczby.

| Liczba                 | Wynik                |
|------------------------|----------------------|
| $16^{\frac{3}{2}}$     | <input type="text"/> |
| $16^{\frac{3}{4}}$     | <input type="text"/> |
| $8^{\frac{2}{3}}$      | <input type="text"/> |
| $8^{\frac{4}{3}}$      | <input type="text"/> |
| $0,25^{-\frac{1}{2}}$  | <input type="text"/> |
| $0,125^{-\frac{5}{3}}$ | <input type="text"/> |
| $0,04^{-1,5}$          | <input type="text"/> |
| $0,008^{-\frac{2}{3}}$ | <input type="text"/> |
| $0,01^{-2,5}$          | <input type="text"/> |
| $0,0001^{-1,5}$        | <input type="text"/> |

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Oblicz wartości potęg o wykładniku będącym odwrotnością liczby naturalnej. Wpisz wynik obok potęgi.

| Liczba                    | Wynik                |
|---------------------------|----------------------|
| $400^{\frac{1}{2}}$       | <input type="text"/> |
| $216^{\frac{1}{3}}$       | <input type="text"/> |
| $625^{\frac{1}{4}}$       | <input type="text"/> |
| $243^{\frac{1}{5}}$       | <input type="text"/> |
| $64^{\frac{1}{6}}$        | <input type="text"/> |
| $0,0000001^{\frac{1}{7}}$ | <input type="text"/> |
| $100000000^{\frac{1}{8}}$ | <input type="text"/> |



## Ćwiczenie 2



Oblicz wartości potęg. Wyniki podaj w postaci rozwinięcia dziesiętnego. Przeciągnij poprawne odpowiedzi w odpowiednie miejsca.

$$64^{-\frac{1}{2}}, 125^{-\frac{1}{3}}, 64^{-\frac{1}{3}}, 625^{-\frac{1}{4}}, 32^{-\frac{1}{5}}, 64^{-\frac{1}{6}}, 10000000^{-\frac{1}{7}}$$

| Liczba                    |  | Rozwinięcie dziesiętne |
|---------------------------|--|------------------------|
| $64^{-\frac{1}{2}}$       |  |                        |
| $125^{-\frac{1}{3}}$      |  |                        |
| $64^{-\frac{1}{3}}$       |  |                        |
| $625^{-\frac{1}{4}}$      |  |                        |
| $32^{-\frac{1}{5}}$       |  |                        |
| $64^{-\frac{1}{6}}$       |  |                        |
| $10000000^{-\frac{1}{7}}$ |  |                        |

### Ćwiczenie 3



Połącz w pary wyrażenia o równych wartościach.

$$\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{5}{4}}$$

$$5\frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{5}{4}}$$

$$\frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{243}{32}\right)^{-\frac{4}{5}}$$

$$7\frac{19}{32}$$

$$\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{4}{5}}$$

$$3\frac{3}{8}$$

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{32}{243}$$

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$2\frac{1}{4}$$

## Ćwiczenie 4



Do odpowiednich grup przyporządkuj wszystkie wyrażenia, które mają tę samą wartość co potęga w nagłówku. Przeciągnij w odpowiednie okienka.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{4}{3\sqrt[3]{12}}, \quad \sqrt{\frac{8}{27}}, \quad \sqrt[3]{\frac{16}{81}}, \quad \frac{9}{2\sqrt{6}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^3, \quad \frac{4}{3\sqrt{6}}, \quad \frac{\sqrt[3]{18}}{2}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}, \quad \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4}}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3, \quad \frac{8}{27}$$

$$\sqrt{\frac{27}{8}}, \quad \frac{3\sqrt{6}}{4}, \quad \frac{2\sqrt{6}}{9}, \quad \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{12}}{3}, \quad \frac{3}{\sqrt[3]{12}}, \quad \frac{2\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{3}}, \quad \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\sqrt[3]{18}}{9}, \quad \frac{2}{\sqrt[3]{18}}, \quad \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

## Ćwiczenie 5

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Wartość potęgi  $3^{-\frac{2}{3}}$  jest równa:

☐  $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

☐  $\frac{\sqrt[3]{9}}{9}$

☐  $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

Wartość potęgi  $3^{-\frac{4}{3}}$  jest równa:

☐  $\frac{\sqrt[3]{9}}{9}$

☐  $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$

☐  $\frac{\sqrt[3]{3}}{9}$

Wartość potęgi  $4^{-\frac{1}{4}}$  jest równa:

☐  $\sqrt{2}$

☐  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

☐  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Wartość potęgi  $5^{-\frac{3}{4}}$  jest równa:

☐  $\frac{\sqrt[4]{125}}{125}$

☐  $\frac{1}{\sqrt[4]{125}}$

☐  $\frac{\sqrt[4]{5}}{5}$

Wartość potęgi  $2^{-\frac{5}{4}}$  jest równa:

☐  $\frac{\sqrt[4]{2}}{4}$

☐  $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$

☐  $\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$

### Ćwiczenie 6



Oblicz wartość wyrażenia  $\left(0,125^{-\frac{4}{3}} \cdot 0,25^{-2}\right)^{\frac{1}{4}} + (81^{1,5} \cdot 9^{-3})^{\frac{1}{4}}$ .

### Ćwiczenie 7



Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{1}{2} \cdot 216^{\frac{2}{3}} + (7,13^{-3})^0 - 81^{0,75} \cdot (0,5)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot 0,0081^{-\frac{3}{4}}$ .

### Ćwiczenie 8



Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{625^{0,25} - 1,5 \cdot 100^{\frac{3}{2}} + 0,25^{-2,5}}{0,008^{-\frac{1}{3}} - (-0,2)^{-2} \cdot 8 + \left(12\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (-4)}$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Sebastian Guz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Potęga o wykładniku wymiernym

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- stosuje definicję potęgi o wykładniku wymiernym,
- stosuje definicje pierwiastków różnych stopni do wykonywania obliczeń,
- stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- metoda stolików eksperckich;
- dyskusja.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

## **Przebieg lekcji**

### **Przed lekcją:**

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Wspólnie na forum klasy omawiają pytania i problemy.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Potęga o wykładniku wymiernym”).

**Materiały pomocnicze**

- [Potęga o wykładniku wymiernym](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Medium w sekcji „Film samouczek” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Potęga o wykładniku wymiernym”.