Jak zastosować zasady dynamiki dla ruchu obrotowego?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Czy to nie ciekawe?

W naszym otoczeniu na każdym kroku spotykamy się z poruszającymi i obracającymi się bryłami sztywnymi - przykładami takich brył są: samochody na drodze, zamykane drzwi, kręcące się wiertło, obracające się ramiona wiatraka. W jaki sposób, korzystając z zasad dynamiki dla ruchu obrotowego, możemy opisać ruch tych brył?

Rys. 1. Wiatrak.

Twoje cele

W tym materiale:

- Poznasz przykłady wykorzystania zasad dynamiki do opisu ruchu obrotowego,
- Zrozumiesz pracę wiatraka od strony mechaniki bryły sztywnej,
- Zastosujesz zasady dynamiki do analizy ruchu bryły sztywnej.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Dynamika to dział mechaniki zajmujący się opisem ruchu ciał na skutek przyłożenia do nich sił. Rozpatrując dynamikę bryły sztywnej, będziemy zajmować się oddzielnie dwoma aspektami tego ruchu: ruchem postępowym oraz ruchem obrotowym.

Równania dla ruchu postępowego bryły sztywnej mają taką samą postać jak równania stosowane do opisu ruchu punktu materialnego. Przypomnijmy zatem treść pierwszej i drugiej zasady dynamiki Newtona:

I: Jeśli na ciało nie działają żadne siły lub działające siły się równoważą, ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

II: Jeśli na ciało o masie m działa niezrównoważona siła wypadkowa $\overrightarrow{F_w}$, ciało to porusza się z przyspieszeniem $\overrightarrow{a}$ wprost proporcjonalnym do wartości tej siły i odwrotnie proporcjonalnym do masy tego ciała.

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{F_w}}{m}$$

W przypadku bryły sztywnej będziemy stosować te zasady, opisując ruch postępowy jej środka masy, analogicznie jak opisuje się ruch punktu materialnego. Ale bryła sztywna nie jest punktem materialnym – ma również możliwość obracania się wokół osi przechodzącej przez jej środek masy lub innej osi. Dlatego do opisu ruchu bryły sztywnej musimy znać również równania dotyczące jej ruchu obrotowego. Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego mają następującą postać:

I: Jeśli na bryłę sztywną nie działają żadne momenty siły lub działające momenty siły się równoważą, bryła ta pozostaje w spoczynku lub obraca się ruchem jednostajnym.

II: Jeśli na bryłę sztywną o momencie bezwładności I działa niezrównoważony wypadkowy moment siły $\overrightarrow{M}$, to bryła ta obraca się z przyspieszeniem kątowym $\overrightarrow{\varepsilon}$ wprost proporcjonalnym do wartości tego momentu siły i odwrotnie proporcjonalnym do momentu bezwładności tej bryły.

Przyjmijmy, że wartość wypadkowego momentu siły jest stała, $\overrightarrow{M} = const.$ = const. Korzystając z definicji przyspieszenia kątowego jako zmiany prędkości kątowej w czasie, $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, możemy zapisać rozwiązanie równań dynamicznych w następującej postaci:

$$\begin{cases} (\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I}} = {}_{\mathbf{0}} = \mathbf{const} \\ (\mathbf{t}) = {}_{\mathbf{0}} + {}_{\mathbf{0}}\mathbf{t} \\ \alpha(\mathbf{t}) = {}_{\mathbf{0}} + {}_{\mathbf{0}}\mathbf{t} + \frac{{}_{\mathbf{0}}\mathbf{t}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \end{cases}$$

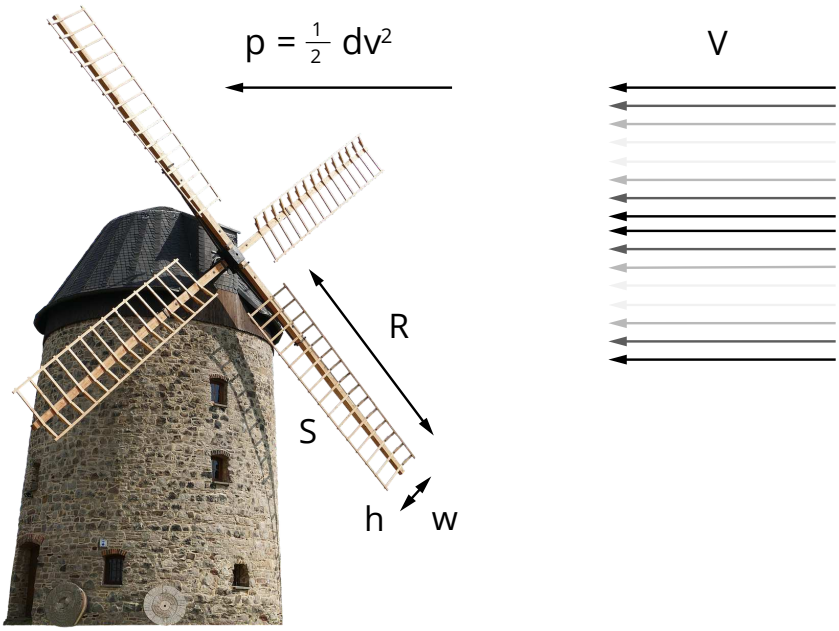
gdzie α – kąt, o jaki obróciła się bryła sztywna, $-$ - prędkość kątowa tej bryły.

Równania te opisują kinematykę ruchu obrotowego jednostajnie przyspieszonego. Jeśli przyjmiemy, że wypadkowy moment siły wynosi zero, czyli przyspieszenie kątowe również wynosi zero, otrzymamy równania opisujące jednostajny ruch obrotowy:

$$\begin{cases} (\mathbf{t}) = \mathbf{0} \\ (\mathbf{t}) = {}_{\mathbf{0}} = \mathbf{const} \\ \alpha(\mathbf{t}) = {}_{\mathbf{0}} + {}_{\mathbf{0}}\mathbf{t} \end{cases}$$

Oczywiście rozpatrujemy tu względnie proste sytuacje, w których wartość siły i momentu siły jest stała. W ogólności wartość siły i momentu siły nie muszą być stałe w czasie.
W takich wypadkach rozwiązanie równań dynamicznych wymaga znajomości rachunku różniczkowo-całkowego.

Zastosujmy zasady dynamiki ruchu obrotowego w praktyce. Przyjrzyjmy się wiatrakowi, którego ramiona obracają się pod wpływem wiatru (Rys. 2.).



Rys. 2. Wiatr wiejący z prędkością *v* wywiera ciśnienie *p* na skrzydła wiatraka.
Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Przyjmijmy, że wiatr wieje z prędkością v. Oznacza to, że wywiera on ciśnienie p na skrzydła wiatraka. Przyjmijmy dla uproszczenia, że wiatr wieje w kierunku prostopadłym do powierzchni wiatraka i wywiera stałe ciśnienie na całą powierzchnię skrzydła. Przyjmijmy, że ramię wiatraka jest prostopadłościanem o grubości h, długości R i szerokości w, zatem jego powierzchnia S wynosi:

$$S = Rw$$

Ciśnienie wiatru, w uproszczeniu, oblicza się jako następujący iloczyn:

$$p = \frac{1}{2}dv^2$$

gdzie d– gęstość powietrza (około 1,25 $\frac{\text{kg}}{m^3}$), v – prędkość wiatru.

Ciśnienie p jest zdefiniowane jako iloraz wartości siły F działającej prostopadle do powierzchni S i powierzchni, na którą działa ta siła : $p = \frac{F}{S}$. Zatem parcie F_p, czyli siła powstająca na skutek działania ciśnienia wiatru, to iloczyn $F_p = pS = pRw$. Parcie wiatru na pojedyncze skrzydło wiatraka wyniesie zatem:

$$F_p = pRw = \frac{1}{2}dv^2Rw$$

W rzeczywistych układach łopaty wiatraka tworzą pewien kąt z osią, na której są umieszczone, lub mają kształt skrzydła. Nie wchodząc w takie dywagacje przyjmijmy, że to właśnie moment obliczonej siły F_p będzie powodował obrót skrzydła wiatraka. Moment ten przyłożony będzie w środku masy skrzydła, czyli w połowie jego długości R. Moment siły przyłożony do pojedynczego skrzydła wyniesie zatem:

$$M_s = \frac{R}{2}F_p = \frac{R}{2}\frac{1}{2}dv^2Rw = \frac{R^2w}{4}dv^2$$

Zastanówmy się teraz, jaki jest moment bezwładności takiego pojedynczego skrzydła. Najpierw zwróćmy uwagę, że jest to prostopadłościan, więc jego moment bezwładności I_0 względem osi, wzdłuż której wieje wiatr wyniesie:

$$I_0 = \frac{1}{12}m(R^2 + w^2)$$

Jednakże skrzydło to obraca się wokół osi przechodzącej nie przez środek masy, a przez bok tego prostopadłościanu. Korzystając z twierdzenia Steinera możemy zapisać, że moment bezwładności względem osi wiatraka wynosi $I = I_0 + I_s$, gdzie

$$I_s = m(\frac{R}{2})^2 = \frac{mR^2}{4}$$

Całkowity moment bezwładności tego skrzydła względem przyjętej osi obrotu wyniesie zatem:

$$I = I_0 + I_s = \frac{1}{12}m\left(R^2 + w^2\right) + \frac{mR^2}{4} = \frac{m\left(R^2+w^2\right)+3mR^2}{12} = m\frac{R^2+w^2+3R^2}{12} = m\frac{w^2+4R^2}{12}$$

Wiemy zatem, jaki jest moment siły i moment bezwładności, możemy więc obliczyć przyspieszenie kątowe, jakiego doznaje to skrzydło. Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\varepsilon = \frac{M_s}{I} = \frac{R^2wdv^2}{4} \cdot \frac{12}{m(w^2+4R^2)} = \frac{3R^2wdv^2}{m(w^2+4R^2)}$$

Zwróćmy uwagę, że masa skrzydła to iloczyn jego gęstości ρ i objętości $V = Rwh$, możemy więc ten wzór uprościć:

$$\varepsilon = \frac{3R^2wdv^2}{\rho Rwh(w^2+4R^2)} = \frac{3Rdv^2}{\rho h(w^2+4R^2)}$$

Weźmy teraz pod uwagę, że szerokość ramienia wiatraka w jest mała w porównaniu z jego długością R. Znaczy to, że w^2 można pominąć jako dużo mniejsze od $4R^2$. W tym przybliżeniu otrzymujemy wzór:

$$\varepsilon = \frac{3Rdv^2}{\rho h(w^2+4R^2)} \approx \frac{3R}{4R^2} \cdot \frac{dv^2}{\rho h} = \frac{3}{4}\frac{dv^2}{R\rho h}$$

Wynik może być zaskakujący – otrzymaliśmy wzór, z którego wynika, że nie ma sensu robienie wiatraków z długimi ramionami! Czy oznacza to, że inżynierowie i konstruktorzy od stuleci popełniali elementarny błąd, konstruując wiatraki o możliwie długich ramionach? Nie. Oznacza to, że przyjęliśmy do obliczeń mało realistyczny model wiatraka! Założyliśmy, że skrzydło jest jednorodnym prostopadłościanem. Owszem, im większy promień skrzydła, tym większa jego powierzchnia – a zatem i parcie wiatru na to skrzydło. Jednakże większy promień oznacza również większy moment bezwładności. Te dwie wielkości się kompensują, co sprawia, że nie ma sensu budowa bardzo długiego skrzydła o takiej konstrukcji (a dla krótszych ramion powyższe przybliżenie jest nieuprawnione).

Dawni konstruktorzy o tym wiedzieli – dlatego budowali np. drewniany szkielet skrzydła i pokrywali go materiałem. W ten sposób zwiększali znacząco powierzchnię skrzydła, nie zwiększając drastycznie jego momentu bezwładności. Współcześni konstruktorzy poszli krok dalej, zmieniając konstrukcję samego ramienia – nie jest to już płaska powierzchnia, wykorzystująca parcie wiatru. Obecnie ramiona mają profil skrzydła, czyli powietrze opływa wyprofilowane skrzydło z różnymi prędkościami, powodując powstanie różnicy ciśnień, a przez to powstanie siły nośnej, prostopadłej do powierzchni skrzydła. Siła ta wprawia ramiona w ruch obrotowy. Dawniej ruch ten wykorzystywano do napędzania mechanizmów mielących zboże. Dziś obracający się wirnik jest częścią układu generującego energię elektryczną, jak w konstrukcjach na Rys. 3.

Rys. 3. Współczesne wiatraki wykorzystywane do produkcji energii elektrycznej.

Źródło: dostępny w internecie: https://www.pexels.com/pl-pl/zdjecie/technologia-moc-produkcja-wiatr-5842545/ [dostęp 9.04.2022 r.], domena publiczna.

Słowniczek

parcie

napór, siła nacisku wywierana przez płyn na określoną powierzchnię.

twierdzenie Steinera

(*ang.: Steiner's theorem*) Moment bezwładności bryły o masie m względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy bryły i odległej od niej o d jest równy: $I = I_0 + md^2$, gdzie I to moment bezwładności tej bryły względem osi przechodzącej przez jej środek masy.

Film samouczek

Jak zastosować zasady dynamiki dla ruchu obrotowego?

Polecenie 1

Obejrzyj samouczek, w którym stosujemy zasady dynamiki do wyznaczenia przyspieszenia kuli staczającej się po równi pochyłej. Zwróć uwagę na sposób powiązania równania ruchu obrotowego kuli z równaniem ruchu postępowego jej środka masy.

Polecenie 2

Ruch kuli staczającej się po równi pochyłej można rozpatrywać jako ruch obrotowy kuli wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez punkt styczności kuli z równią, równoległej do osi przechodzącej przez środek masy. Wykaż, że taki sposób rozwiązania zadania prowadzi do tego samego wzoru na przyspieszenie kątowe.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Jak brzmi treść pierwszej zasady dynamiki Newtona, opisującej ruch postępowy środka masy bryły sztywnej?

- Jeśli na ciało nie działają żadne siły lub działające siły się równoważą, ciało pozostaje w spoczynku.
- Jeśli na ciało nie działają żadne siły lub działające siły się równoważą, ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
- Jeśli na ciało nie działają żadne siły lub działające siły się równoważą, ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
- Jeśli na ciało nie działają żadne siły, ciało pozostaje w spoczynku.

Ćwiczenie 2

Przyspieszenie kuli o promieniu r, masie m, staczającej się z równi o kącie nachylenia α, wysokości h, zależy - poza przyspieszeniem ziemskim g - od:

- kąta nachylenia równi α
- promienia kuli r
- wysokości h, z której stacza się kula
- masy kuli m

Ćwiczenie 3

Z równi o kącie nachylenia α = 30° stacza się kula o masie m = 1 kg. Promień kuli wynosi r = 10 cm. Z jakim przyspieszeniem stacza się ta kula? Odpowiedź zapisz z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

a = _____ $\frac{m}{s^2}$

Ćwiczenie 4

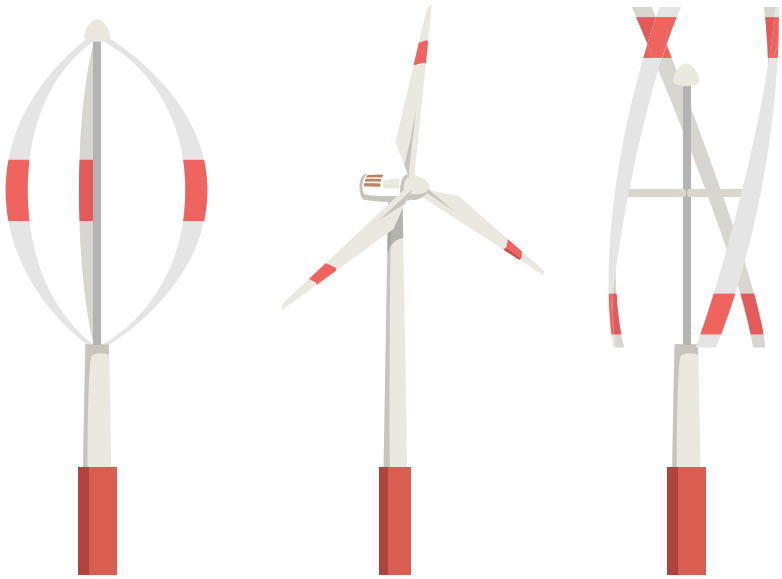
Czy prawdziwe jest następujące stwierdzenie: im dłuższe ramię wiatraka, tym większa będzie prędkość kątowa jego obrotu (przy tym samym wietrze), ponieważ zwiększa się powierzchnia robocza skrzydła?

TAK ☐ \ NIE ☐

Ćwiczenie 5

Przyjrzyj się poniższym zdjęciom - prezentują one przykłady turbin wiatrowych o pionowej osi obrotu (VAWT - Vertical Axis Wind Turbine), tak zwane turbiny Savonius'a i Darrieus'a.

Zastanów się nad zaletami tego typu konstrukcji w porównaniu do turbin o tradycyjnej, poziomej osi obrotu (HAWT - Horizonta Axis Wind Turbine), rozpatrując zagadnienie z perspektywy mechaniki bryły sztywnej.



Ćwiczenie 6

Jak brzmi treść pierwszej zasady dynamiki opisującej ruch obrotowy bryły sztywnej?

- Jeśli na bryłę sztywną nie działają żadne momenty siły lub działające momenty siły się równoważą, bryła ta pozostaje w spoczynku.
- Jeśli na bryłę sztywną nie działają żadne momenty siły, bryła ta pozostaje w spoczynku lub obraca się ruchem jednostajnym.
- Jeśli na bryłę sztywną nie działają żadne momenty siły, bryła ta pozostaje w spoczynku lub obraca się ruchem jednostajnym.
- Jeśli na bryłę sztywną nie działają żadne momenty siły lub działające momenty siły się równoważą, bryła ta pozostaje w spoczynku lub obraca się ruchem jednostajnym.

Ćwiczenie 7

Jak brzmi treść drugiej zasady dynamiki Newtona opisującej ruch postępowy bryły sztywnej?

- Jeśli na ciało o masie m działa niezrównoważona siła wypadkowa $\vec{\mathrm{F}}_w$, to ciało to porusza się z przyspieszeniem $\vec{\mathrm{a}}$ wprost proporcjonalnym do masy tego ciała i odwrotnie proporcjonalnym do wartości tej siły.
- Jeśli na ciało o masie m działa zrównoważona siła wypadkowa $\vec{\mathrm{F}}_w$, to ciało to porusza się z przyspieszeniem $\vec{\mathrm{a}}$ wprost proporcjonalnym do wartości tej siły i odwrotnie proporcjonalnym do masy tego ciała.
- Żadne z powyższych.
- Jeśli na ciało o masie m działa niezrównoważona siła wypadkowa $\vec{\mathrm{F}}_w$, to ciało to porusza się z przyspieszeniem $\vec{\mathrm{a}}$ wprost proporcjonalnym do wartości tej siły i odwrotnie proporcjonalnym do masy tego ciała.

Ćwiczenie 8

Jak brzmi treść drugiej zasady dynamiki opisującej ruch obrotowy bryły sztywnej?

- Żadne z powyższych.
- Jeśli na bryłę sztywną o momencie bezwładności I działa niezrównoważony wypadkowy moment siły $\vec{M}$, to bryła ta obraca się z przyspieszeniem kątowym $\vec{\varepsilon}$ wprost proporcjonalnym do momentu bezwładności tej bryły i odwrotnie proporcjonalnym do wartości tego momentu siły.
- Jeśli na bryłę sztywną o momencie bezwładności I działa niezrównoważony wypadkowy moment siły $\vec{M}$, to bryła ta obraca się z przyspieszeniem kątowym $\vec{\varepsilon}$ wprost proporcjonalnym do wartości tego momentu siły i odwrotnie proporcjonalnym do momentu bezwładności tej bryły.
- Jeśli na bryłę sztywną o momencie bezwładności I działa zrównoważony wypadkowy moment siły $\vec{M}$, to bryła ta obraca się z przyspieszeniem kątowym $\vec{\varepsilon}$ wprost proporcjonalnym do wartości tego momentu siły i odwrotnie proporcjonalnym do momentu bezwładności tej bryły.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	**Jak zastosować zasady dynamiki dla ruchu obrotowego?**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	**Cele kształcenia – wymagania ogólne** II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji lub doświadczeń oraz wnioskowanie na podstawie ich wyników. **Zakres rozszerzony** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 10) przeprowadza wybrane obserwacje, pomiary i doświadczenia korzystając z ich opisów; planuje i modyfikuje ich przebieg; formułuje hipotezę i prezentuje kroki niezbędne do jej weryfikacji. III. Mechanika bryły sztywnej. Uczeń: 4) stosuje zasady dynamiki dla ruchu obrotowego; posługuje się pojęciami przyspieszenia kątowego oraz momentu bezwładności jako wielkości zależnej od rozkładu mas, wraz z ich jednostkami.

Kształtowane kompetencje kluczowe:	**Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:** • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: 1. poda przykłady wykorzystania zasad dynamiki do opisu ruchu obrotowego. 2. omówi pracę wiatraka od strony mechaniki bryły sztywnej. 3. zastosuje zasady dynamiki do analizy ruchu bryły sztywnej.
Strategie i metody nauczania:	eksperymentalno-obserwacyjna
Formy zajęć:	praca indywidualna, praca w grupach
Środki dydaktyczne:	komputer z dostępem do Internetu i projektorem multimedialnym, walce lub kule o różnych masach i rozmiarach
Materiały pomocnicze:	brak
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel prezentuje klasie film-samouczek z niniejszego e-materiału. Po obejrzeniu go, nauczyciel prosi uczniów o indywidualne rozwiązanie zadań 2 i 3, aby upewnić się, że przyswoili oni przekazaną treść. Następnie nauczyciel prosi o dobranie się w kilkuosobowe grupy i przeanalizowanie analogicznego przykładu, ale z walcem zamiast kuli. Po wykonaniu zadania przez większość grup nauczyciel prosi przedstawiciela jednej z nich o przedstawienie rozwiązania na tablicy, a resztę grup o zweryfikowanie tego rozwiązania. Po ewentualnej dyskusji nad rozbieżnościami, nauczyciel przechodzi do części doświadczalnej.	
Faza realizacyjna:	

Nauczyciel rozdaje uczniom walce wykonane z różnych materiałów, po kilka dla każdej grupy. Uczniowie z płaskiej powierzchni (np. twardej okładki zeszytu) budują równię pochyłą o małym kącie nachylenia. Korzystając z kątomierza lub ekierki uczniowie wyznaczają kąt równi. Mierząc czas stoperem w telefonie lub w zegarku uczniowie przeprowadzają serię eksperymentów, aby potwierdzić otrzymaną na początku lekcji zależność – brak wpływu masy obiektu na przyspieszenie, z jakim się stacza z równi. Po wykonaniu eksperymentów nauczyciel prosi uczniów o zapisanie wniosków i zachęca do wspólnej dyskusji nad nimi.	
Faza podsumowująca:	
Na zakończenie nauczyciel prezentuje treść zadania 5 z zestawu ćwiczeń i daje chwilę na zastanowienie się nad odpowiedziami. Nauczyciel zapisuje na tablicy odpowiedzi: tak i nie oraz argumenty osób, które się z daną odpowiedzią zgadzają. Następnie nauczyciel podaje prawidłową odpowiedź, zadając jako pracę domową przeczytanie treści e-materiału ze szczególnym uwzględnieniem fragmentu poświęconego wiatrakowi jako bryle sztywnej.	
Praca domowa:	
Zadania 1, 5, 6, 7 dla powtórzenia zasad dynamiki oraz 6 dla ugruntowania wiedzy zdobytej z e-materiału.	
Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:	Można zastosować strategię odwróconej klasy, prosząc uczniów o obejrzenie samouczka w domu, a więcej czasu poświęcić na eksperymenty z równią.