



Okręgi na powierzchni kuli

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Okręgi na powierzchni sferycznej odgrywają ważną rolę. Popatrz na globus. Bez południków i równoleżników nie wyobrażamy sobie orientacji na kuli ziemskiej. Czy tworząc okręgi na sferze i korzystając z nich możemy posługiwać się wiedzą o okręgach na płaszczyźnie?

Podczas tej lekcji zajmiemy się okręgami na powierzchni kuli. Materiał zawarty w tej lekcji jest materiałem nieobowiązkowym, więc jeśli nie interesuje Cię ta tematyka, możesz po prostu lekcję pominąć.

Twoje cele

- Powtórzysz wiadomości o okręgach na płaszczyźnie.
- Wykreślisz okręgi na sferze i zbadasz ich własności.
- Porównasz własności okręgów na płaszczyźnie i na sferze.

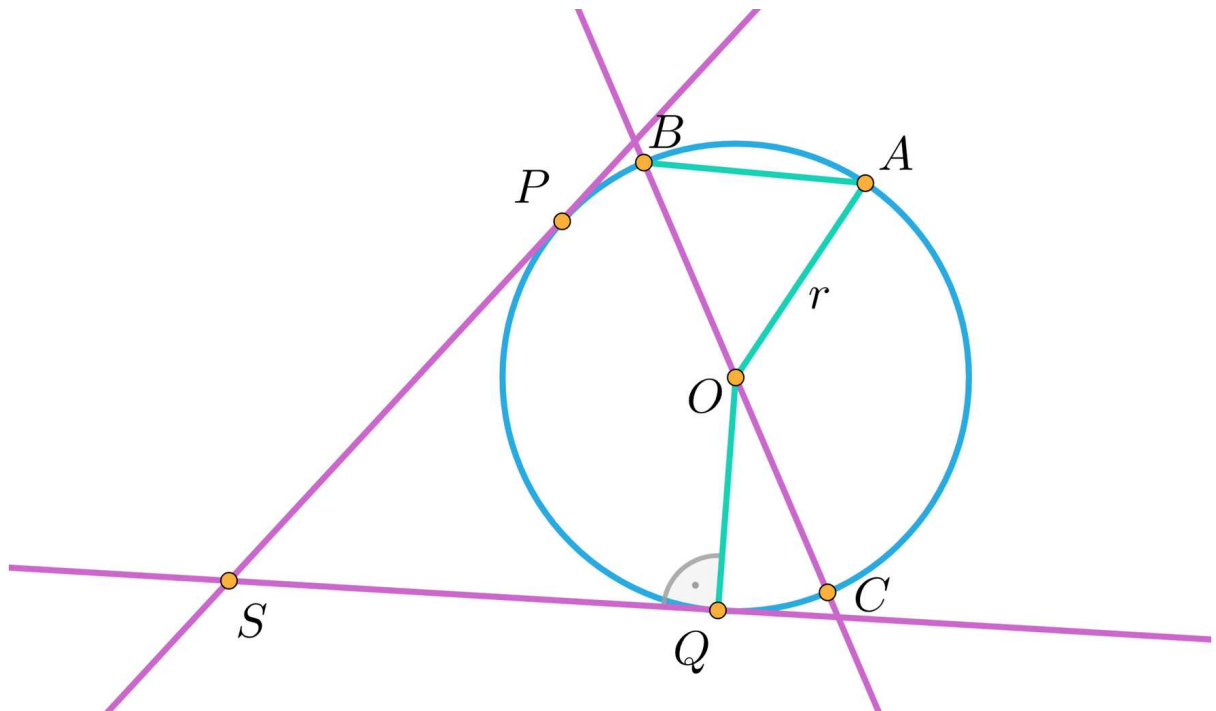
Przeczytaj

Przypomnijmy wiadomości o okręgu.

Przykład 1

Okrąg to zbiór punktów płaszczyzny, które są równo oddalone od jednego wybranego punktu, zwanego środkiem okręgu.

Popatrzmy na poniższy obrazek i przypomnijmy, jakie ważne pojęcia z nim się wiążą.



Rozwiązanie

Jeżeli za środek okręgu przyjmiemy punkt O , to odległość tego środka od dowolnego punktu okręgu jest równa **promieniowi** r :

$$(|OA| = r, |OB| = r, |OC| = r).$$

Odcinek łączący dwa punkty okręgu, przechodzący przez jego środek nazywamy średnicą okręgu. Średnica okręgu jest jednocześnie najdłuższą cięciwą i jej długość jest równa $2r$: ($|BC| = 2r$).

Cięciwa okręgu to dowolny odcinek łączący dwa punkty leżące na okręgu (na naszej ilustracji przykładowa cięciwa to odcinek BA).

Prosta zawierająca cięciwę to **sieczna okręgu**; ma ona dwa punkty wspólne z okręgiem (np. prosta przechodząca przez punkty B i C czy też prosta przechodząca przez punkty

A i B).

Prosta, która ma tylko jeden punkt wspólny z okręgiem, to **styczna do okręgu**. Z każdego punktu leżącego na zewnątrz okręgu można poprowadzić dwie styczne do tego okręgu (w naszym przykładzie to prosta przechodząca przez punkty S i P oraz prosta przechodząca przez punkty S i Q).

Punkty P i Q to punkty styczności. Odcinki SP i SQ są równe.

Promień poprowadzony ze środka okręgu do punktu styczności jest prostopadły do stycznej w tym punkcie.

Przykład 2

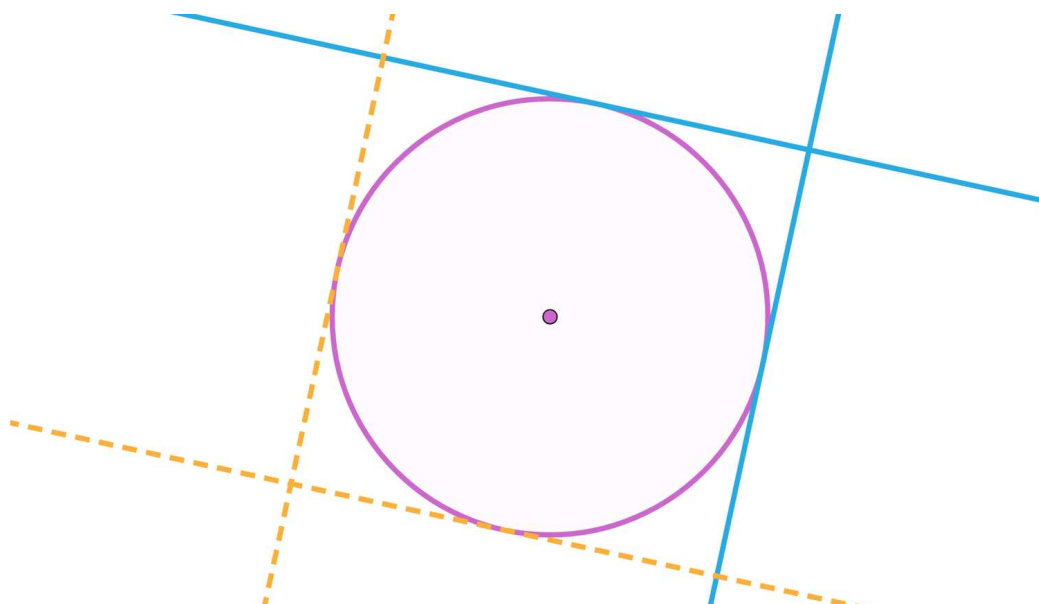
Jaką wspólną ważną własność mają okręgi? Jak ją odkryć?

Rozwiązanie

W każdym okręgu stosunek długości okręgu do jego średnicy równa się tej samej liczbie niewymiernej π , której najbardziej popularne i najczęściej używane przybliżenie to 3,14.

Liczba π to najsłynniejsza stała w matematyce; powinien ją znać każdy uczeń kończący szkołę podstawową. Historia tej liczby oraz historia określania coraz większej liczby cyfr w jej rozwinięciu dziesiętnym (czyli znajdowania coraz dokładniejszych jej przybliżeń) jest bogata i fascynująca. Możemy przeczytać o niej wiele w różnych źródłach. My skupmy się teraz na pytaniu: jak odkryć tę ważną własność okręgu?

Można przeprowadzić eksperyment matematyczny: zmierzyć (np. nitką, którą później rozwiniemy wzdłuż linii z podziałką) dowolny okrągły przedmiot, potem znaleźć jego średnicę (podpowiedź jak to zrobić w poniższym rysunku, gdzie dwie proste prostopadłe mogą być wyznaczone np. przez naroże stołu):



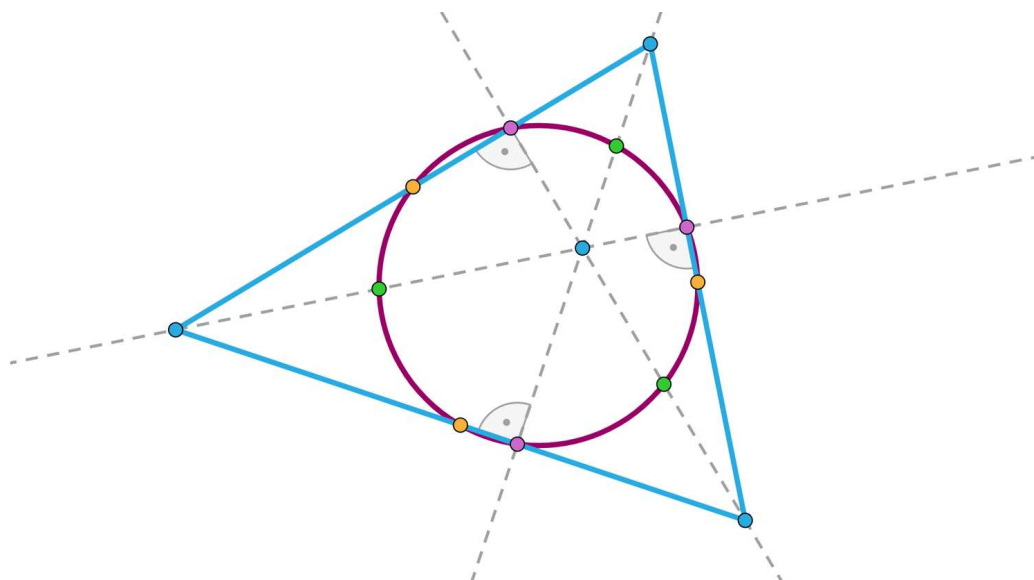
i podzielić dwie liczby przez siebie. Oczywiście pamiętajmy, że wykonanie jednego eksperymentu, czy też wykonanie wielu eksperymentów przez wielu uczniów nie stanowi dowodu, ale pozwala postawić hipotezę dotyczącą stosunku długości okręgu do jego średnicy.

Przykład 3

Czy istnieją okręgi w szczególny sposób związane z innymi figurami geometrycznymi?

Rozwiązanie

Tak. Chyba najbardziej znanym przykładem jest tutaj okrąg dziewięciu punktów, czyli **okrąg**, który przechodzi przez dziewięć charakterystycznych punktów dowolnego trójkąta. Punktami tymi są: środki boków, spodki trzech wysokości oraz punkty dzielące na połowy trzy odcinki, które łączą wierzchołki tego trójkąta z jego ortocentrum, czyli punktem przecięcia jego wysokości:



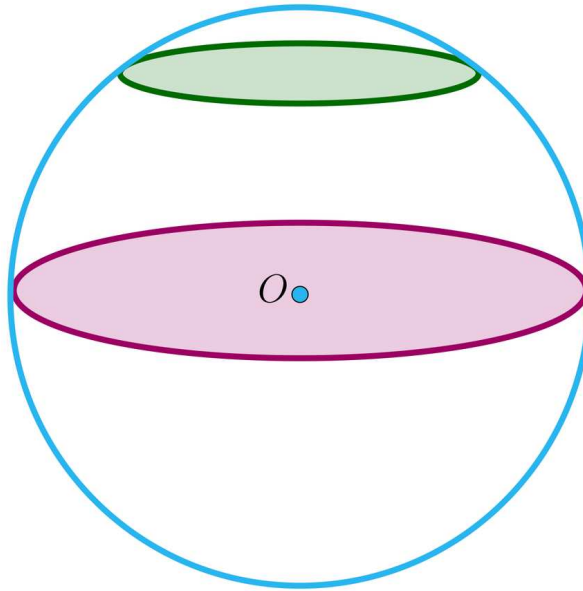
Bardzo ciekawa jest historia odkrycia tego okręgu. W 1822 roku Karl Wilhelm Feuerbach, którego nazwiskiem nazywa się czasem okrąg dziewięciu punktów, zauważył, że sześć charakterystycznych punktów trójkąta – środki boków oraz spodki wysokości – leżą na wspólnym okręgu. Krótko potem matematyk Olry Terquem niezależnie udowodnił istnienie takiego okręgu i jako pierwszy zauważył, że leżą na nim również środki odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum. Jako pierwszy użył on nazwy „okrąg dziewięciu punktów”.

Przykład 4

Czy na powierzchniach innych niż płaszczyzna też istnieją okręgi?

Rozwiązanie

Tak, na przykład na powierzchni kuli też można skonstruować okręgi. Przekrój kuli płaszczyzną przechodzącą przez jej środek, wyznacza na jej powierzchni okrąg wielki. Inne przekroje wyznaczają na jej powierzchni okręgi o promieniach mniejszych niż promień kuli, jak obrazuje to poniższy rysunek.



Okręgi widzimy też na globusie, który jest modelem kuli ziemskiej. Przykładem okręgu wielkiego jest równik, okręgów małych – równoleżniki:



Ciekawostka

Każdy okrąg na sferze można przedstawić jako okrąg równoleżnikowy. Wystarczy zmienić położenie równika tak, żeby jego płaszczyzna była równoległa do płaszczyzny wyznaczonej przez wybrany okrąg.

Długość i średnicę okręgu równoleżnikowego, leżącego na szerokości geograficznej $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ można obliczyć za pomocą wzorów:

$$L = 2\pi R \cos x,$$

$$d = 2R\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

gdzie R oznacza długość promienia sfery.

Patrząc na zakrzywienie sfery możemy jednak zadać sobie kolejne pytanie: Jak możemy szukać prostej na powierzchni zakrzywionej, jeśli tam nie ma nic prostego – wszystko jest krzywe?

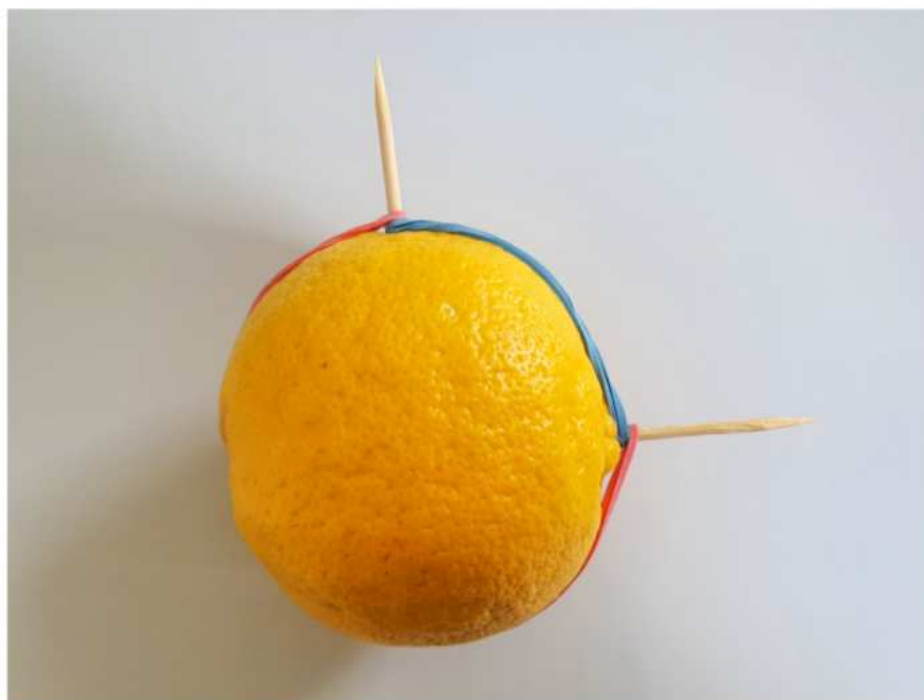
Przykład 5

Rozważmy sytuację: Mamy dwa różne punkty na płaszczyźnie: A i B . Wiemy, że najkrótsza droga między nimi, to droga zawarta w prostej przechodzącej przez nie. Czy, gdy będziemy przedłużać w nieskończoność końce linii, w której zawarta jest najkrótsza droga między dwoma punktami, końce tej linii spotkają się gdziekolwiek?

Rozwiązanie

Odpowiedź jest prosta. Nie, ponieważ „długość” prostej jest nieskończona.

Wyobraźmy sobie teraz taką sytuację na sferze i odpowiedzmy na powyższe pytanie.



Założmy, że pinezki wbite w kulę styropianową reprezentują punkty na sferze. Gumka recepturka o kolorze niebieskim przedstawia najkrótszą drogę między tymi punktami,

czerwona – najdłuższą. Obserwujemy, że utworzyły one łuki. Gdy zaczniemy teraz wydłużać „drogę”, między dwoma punktami w obu kierunkach, to te „przedłużenia” spotkają się, tworząc jej dopełnienie do pełnego okręgu.

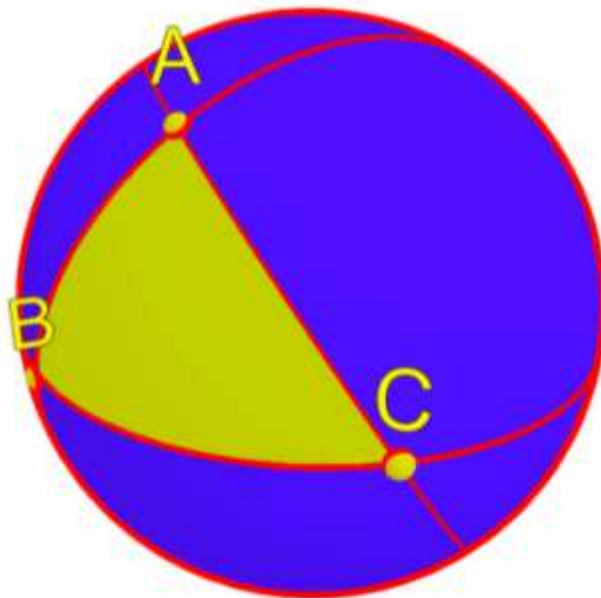
Łącząc dwa dowolne punkty na sferze wydłużyliśmy linię i otrzymaliśmy okrąg wielki.

Przez okrąg wielki uznajemy **sferyczną prostą**. Wzdłuż tej prostej mierzymy odległości na sferze.

Skoro wiemy, czym jest prosta sferyczna, przejdziemy teraz do definicji **trójkąta sferycznego**.

Definicja: Trójkąt sferyczny

Trójkąt sferyczny to część powierzchni kuli, zawarta między trzema łukami kół wielkich przecinających się parami.



Długość boku trójkąta sferycznego, to długość krótszego łuku koła wielkiego przechodzącego przez jego dwa wierzchołki. Odległość między tymi punktami nazywamy **odległością sferyczną**. Odległość sferyczna może być mierzona bezpośrednio przez kąt wewnętrzny mierzony w stopniach. Ponadto w trójkącie sferycznym nie może być dwóch boków, których długości byłyby większe niż połowa okręgu (większe od 180°).

Ważne!

Na sferze suma kątów wewnętrznych trójkąta jest zawsze większa od 180° .

Słownik

okrąg

zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, których odległość od ustalonego punktu (zwanego środkiem okręgu), jest równa zadanej odległości (zwanej promieniem okręgu)

promień okręgu

odległość punktu okręgu od jego środka

średnica okręgu

cięciwa przechodząca przez środek okręgu

cięciwa okręgu

odcinek łączący dwa punkty leżące na okręgu

styczna do okręgu

prosta mająca z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny

sieczna okręgu

prosta przecinająca okrąg w dwóch punktach

prosta sferyczna

okrąg wielki na sferze

trójkąt sferyczny

część powierzchni kuli, zawarta między trzema łukami kół wielkich przecinających się parami

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem edukacyjnym. Postaraj się odpowiedzieć na stawiane pytania, zanim lektor poda odpowiedź.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DzaRUeiE1>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej okręgów na powierzchni kuli.

Polecenie 2

Zastanów się, czy na sferze stosunek długości okręgu do jego średnicy jest zawsze stały? Czy jest równy π , jak na płaszczyźnie? Aby to sprawdzić, możesz wykonać następujące doświadczenie: Narysuj kilka okręgów na powierzchni kuli, zmierz (na przykład posługując się nitką) długość każdego z nich, a następnie zmierz długość średnicy każdego okręgu (pamiętaj, że poruszasz się tylko po powierzchni kuli). Wykonaj obliczenia i wyciągnij wniosek.

Polecenie 3

Wyciągnij wnioski z rezultatów poprzedniego doświadczenia i określ przedział, w jakim zawarty jest stosunek długości okręgu sferycznego do jego średnicy. Rozważ okręgi bardzo małe, które znajdują się na bardzo małej powierzchni, którą lokalnie można uznać za niemal płaską, oraz największy okrąg, jaki można narysować na sferze.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1

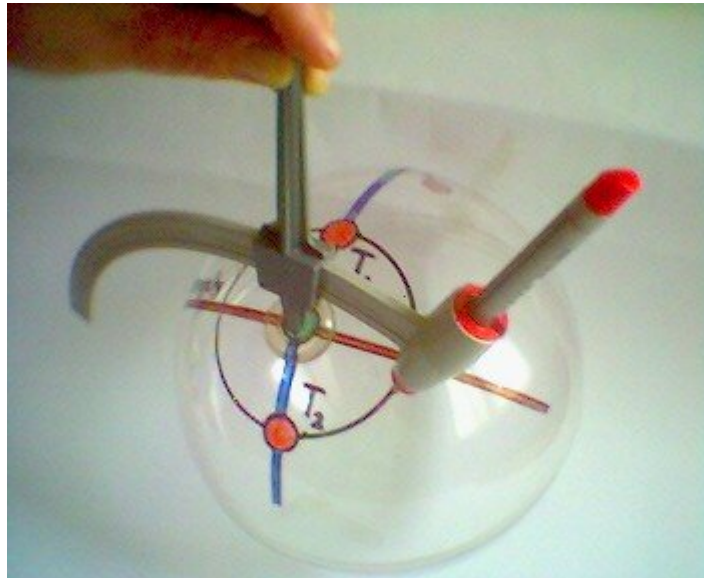


Skonstruuj na sferze okrąg o środku w punkcie P . Wyznacz punkt biegunowy (punkt maksymalnie oddalony od koła wielkiego) do punktu P i nazwij go P' . Czy punkt P' jest środkiem okręgu, który został przez Ciebie narysowany jako pierwszy? Jak to sprawdzić? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Ćwiczenie 2



Na poniższym zdjęciu widać cyrkiel sferyczny z zestawu specjalnie zaprojektowanych przyrządów do konstrukcji na powierzchni kuli:



Źródło: István Lénárt, licencja: CC BY-SA 3.0.

Widać na nim, że na zakrzywionej części można regulować promień okręgu. Przypomnij sobie, w jakich jednostkach mierzymy odległości (a więc również długości odcinków sferycznych) na sferze i wybierz prawidłowe odpowiedzi na następujące pytania:

Jaki może być największy promień okręgu narysowanego na sferze?
Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 120°

☐ 180°

☐ 360°

☐ 90°

Ćwiczenie 3



Kontynuujmy rozważanie z Ćwiczeń 1 i 2. Jeśli (w Ćwiczeniu 1) stwierdziliśmy, że każdy punkt okręgu jest równo oddalony od dwóch wyróżnionych punktów, to powstaje pytanie: Ile środków ma okrąg sferyczny? Ile ma promieni sferycznych? Czy jest jakiś związek pomiędzy odcinkami sferycznymi, które mogą być uznane za promień okręgu? Popatrz jeszcze raz na zdjęcie lub wykonaj własne doświadczenie, wyciągnij wnioski i uzupełnij poniższy tekst.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Rzeczywiście, jeśli istnieją punkty takie, że każdy punkt okręgu jest równo oddalony od każdego z nich, to teoretycznie okrąg sferyczny ma . W tej sytuacji ma też dwa : są to odległości punktów okręgu od jego środków. Suma tych odległości (czyli suma długości dwóch) jest równa 180° , czyli odległości między . Jednak, aby uniknąć niejednoznaczności w obliczeniach np. wielkości okręgu, przyjmuje się za okręgu sferycznego punkt, którego odległość od każdego punktu okręgu jest nie większa niż 90° , a za jego promień tę właśnie odległość.

biegunami

środek

odcinków sferycznych

dwa środki

promień sferyczny

dwa

Ćwiczenie 4



Rozważ zdanie: Aby na sferze narysować okrąg o promieniu 120° , wystarczy narysować okrąg o promieniu $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Czy jest to zdanie prawdziwe, czy fałszywe?

Prawda	Fałsz
☐	☐

Ćwiczenie 5



Który południk ma długość równą połowie długości równika?

Ćwiczenie 6



Czy na trójkącie sferycznym można opisać okrąg? Wykonaj odpowiednią konstrukcję i uzasadnij odpowiedź.

Ćwiczenie 7



Przeciągnij odpowiednie elementy w odpowiednie miejsca i wypełnij poniższą tabelę podsumowując swoje odkrycia dotyczące własności okręgów na płaszczyźnie i na sferze.

Co to jest okrąg?, Ile jest punktów równo oddalonych od każdego punktu danego okręgu?, Czy można narysować największy okrąg?, Jaką część średnicy stanowi promień?, Największy możliwy promień okręgu jest równy..., Czy okrąg może przyjąć postać prostej?, Stosunek długości okręgu do jego średnicy jest...

Zdanie	Na płaszczyźnie	Na sferze
Co to jest okrąg?		
Ile jest punktów równo oddalonych od każdego punktu danego okręgu?		
Czy można narysować największy okrąg?		
Jaką część średnicy stanowi promień?		
Największy możliwy promień okręgu jest równy...		
Czy okrąg może przyjąć postać prostej?		
Stosunek długości okręgu do jego średnicy jest...		

Ćwiczenie 8



A teraz wyobraź sobie okrąg w przestrzeni kosmicznej. Gdyby orbita Ziemi w ruchu wokół Słońca była idealnym okręgiem, jaki kąt wyznaczyłaby Ziemia obiegając Słońce w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara od równonocy jesiennej do przesilenia letniego?

Dla nauczyciela

Autor: Anna Rybak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okręgi na powierzchni kuli

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- pogłębia wiadomości o okręgach na płaszczyźnie;
- bada własności okręgów na płaszczyźnie i na sferze;
- porównuje własności okręgów na płaszczyźnie i na sferze.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- dyskusja;
- eksperyment.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- globusy, kulki styropianowe, owoce kuliste, zakrętki do butelek, wykałaczki, igły lub szpilki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Okręgi na powierzchni kuli”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj”, przypominając wiadomości o okręgach na płaszczyźnie.
2. Uczniowie zapoznają się z filmem edukacyjnym (czyli wykonują Polecenie 1 z sekcji „Film edukacyjny”).
3. Następnie wykonują Polecenia 2 i 3, rozwiązują postawione problemy dotyczące stosunku długości okręgu sferycznego do jego średnicy, a następnie dyskutują o swoich wnioskach.
4. Uczniowie w drodze burzy mózgów generują pomysły na wykonanie Ćwiczenia 1, a następnie wykonują odpowiednie czynności na swoich narzędziach badawczych (kulkach, owocach itp.).
5. Uczniowie samodzielnie wykonują Ćwiczenie 2, a następnie w dyskusji podsumowują swoje wyniki.
6. Uczniowie dyskutują nad Ćwiczeniem 3, następnie indywidualnie wykonują Ćwiczenia 4, 5, 6, 8 i w drodze dyskusji prezentują i podsumowują swoje rezultaty.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytania: Co było w lekcji trudne? Co było w lekcji interesujące? Odnosi się do elementów wskazanych jako trudne.
2. Uczniowie krótko podsumowują swoje osiągnięcia, rozwijając zdanie: Na dzisiejszych zajęciach najważniejsze dla mnie było...

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują Ćwiczenie 7 z sekcji „Film edukacyjny”.

Materiały pomocnicze:

- [Koła i okręgi](#)
- [Okrąg, koło i ich elementy](#)
- [Współrzędne geograficzne](#)

Wskazówki metodyczne:

- W tej lekcji występują czynności konkretne (na przedmiotach rzeczywistych), wyobrażeniowe (na schematach, rysunkach itp.) i abstrakcyjne (podczas wnioskowania). Uczniowie mogą dokonywać też symulacji komputerowych i sprawdzać swoje przypuszczenia.
- Najważniejsza w lekcji jest praca własna uczniów z różnymi (w tym manualnymi) pomocami dydaktycznymi), formułowanie przez nich wniosków i argumentowanie poprawności tych wniosków. Nie starajmy się odpowiadać za uczniów na postawione pytania. W sytuacjach, gdy uczniowie mają problem ze sformułowaniem wniosku cierpliwie naprowadzamy ich pytaniami pomocniczymi na pożądane tory rozumowania, inspirujemy do wykonywania czynności abstrakcyjnych na bazie wykonanych przez nich czynności konkretnych. To uczniowie mają prowadzić pracę badawczą i odkrywać wiedzę, otworzyć się na prowadzenie naukowego dyskursu.
- Film (zwłaszcza część pierwszą odnoszącą się do okręgów na płaszczyźnie) można też wykorzystać jako wprowadzenie do omawiania tematów związanych z okręgami – przypomnienie wiadomości o okręgach. Drugą część filmu można wykorzystać jako przykład w każdej sytuacji, gdy chcemy zachęcić uczniów do przygotowywania nietypowych pomocy dydaktycznych, które będą im służyły jako narzędzia ich pracy badawczej i do rozwiązywania problemów.