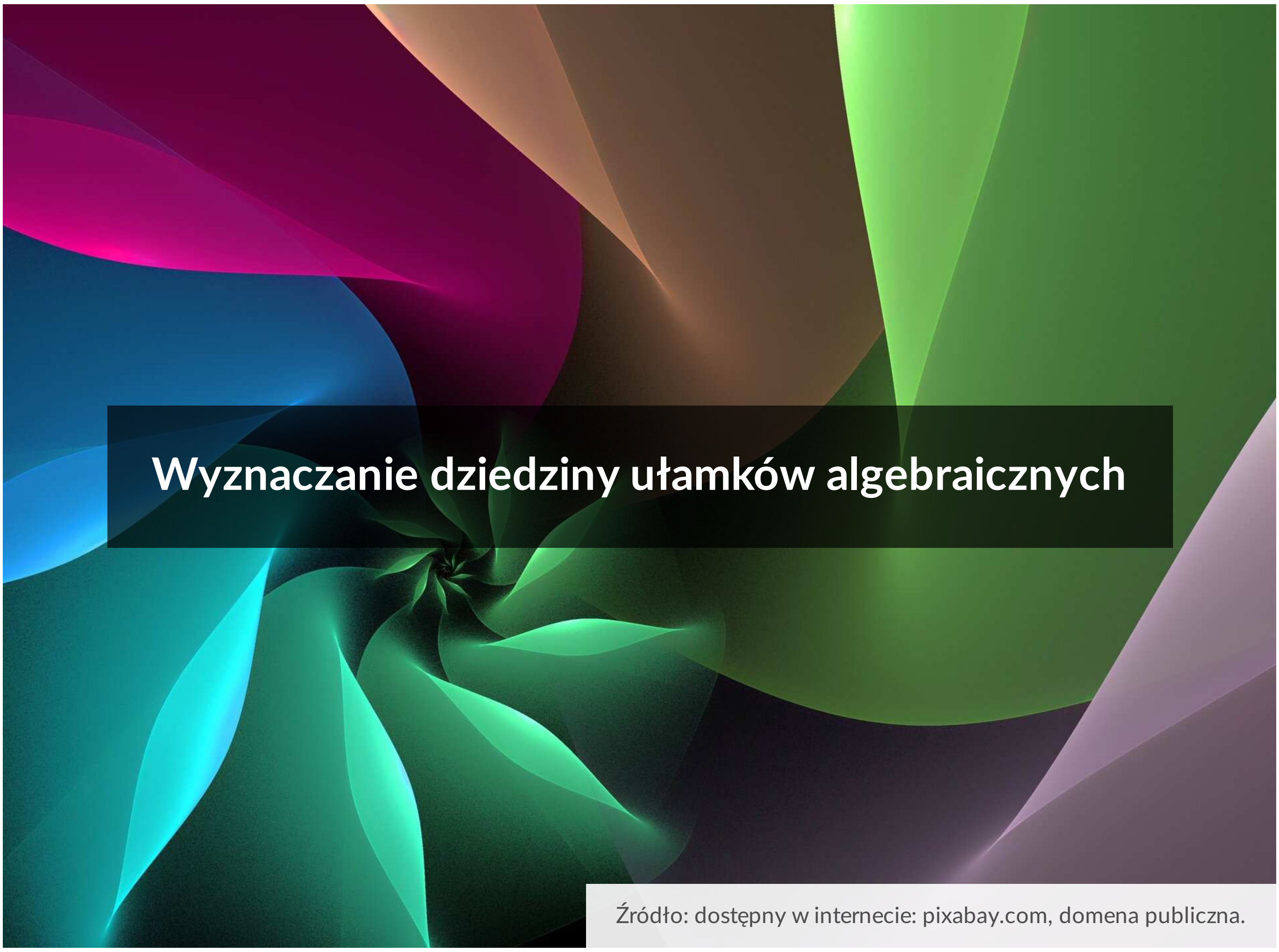
Wyznaczanie dziedziny ułamków algebraicznych

Wyznaczanie dziedziny ułamków algebraicznych



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Zajmujemy się wyrażeniami algebraicznymi zapisanymi w formie ułamka zwykłego - z użyciem kreski ułamkowej.

Między dwie dowolne liczby rzeczywiste możemy wstawić znak dodawania, odejmowania lub mnożenia - takie działanie zawsze będzie wykonalne. Czwarte z czterech podstawowych działań, czyli dzielenie, ma już ograniczenie - brak możliwości dzielenia przez zero.

Wyznaczenie dziedziny ułamka algebraicznego będzie wymagało zatem ustalenia, dla jakich wartości zmiennych występujących w mianowniku ułamka mianownik ten może osiągnąć wartość zero.

Twoje cele

- Wykorzystasz nabyte w trakcie nauki umiejętności rozwiązywania równań do wyznaczania dziedziny ułamków algebraicznych.
- Zapiszesz różnymi sposobami dziedziny ułamków algebraicznych.

Przeczytaj

Wyznaczanie dziedziny wyrażeń algebraicznych zapisanych w formie ułamka

Zajmiemy się wyznaczaniem dziedziny wyrażeń algebraicznych zapisanych w formie ułamka, ale zaczniemy od przypomnienia, że określając dziedzinę wyrażenia algebraicznego należy podać dla wszystkich zmiennych występujących w wyrażeniu warunki, przy których spełnieniu wyrażenie przyjmuje jakąś wartość; w szczególności:

- mianowniki ułamków i liczby przez które dzielimy muszą być różne od zera;
- liczby podpierwiastkowe pierwiastków parzystego stopnia nie mogę być liczbami ujemnymi;
- podstawa logarytmu i liczba logarytmowana muszą być dodatnie, ponadto podstawa logarytmu musi być różna od 1;
- zero nie może być podstawą potęgi o wykładniku 0.

Wyznaczając dziedzinę wyrażeń algebraicznych zapisanych w formie ułamka należy pamiętać, że:

- jeżeli w wyrażeniu algebraicznym występuje tylko jedna niewiadoma, określając jego dziedzinę wystarczy podać podzbiór zbioru liczb rzeczywistych zawierający wszystkie liczby, po których wstawieniu w miejsce niewiadomej będzie możliwe obliczenie wartości wyrażenia. Czasem zamiast podawać zbiór liczb spełniających powyższy warunek prościej jest zapisać, które liczby do dziedziny nie należą;
- jeżeli w wyrażeniu algebraicznym jest więcej niewiadomych, należy określić warunki dla wszystkich niewiadomych. Czasem warunki te będą zredagowane podobnie, jak w przypadku jednej niewiadomej, mogą też mieć formę pewnych zależności między różnymi zmiennymi.

W pierwszych czterech przykładach określimy dziedzinę ułamków algebraicznych z jedną zmienną, pokazując za każdym razem co najmniej dwa sposoby zapisu warunków określających dziedzinę.

Przykład 1

Podamy dziedzinę wyrażenia $\frac{1}{x-2}$.

Rozwiązanie

- Jedyny warunek na istnienie tego ułamka wynika z niemożności podzielenia przez 0.
- Zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- Można też ten warunek zapisać trochę inaczej: $x \neq 2$.

Przykład 2

Podamy dziedzinę wyrażenia $\frac{x}{x^3-3x^2-x+3}$.

Rozwiązanie

- Ułamek ten jest określony, gdy jego mianownik przyjmuje wartość różną od 0.
- Wyznaczmy rozwiązania równania $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$
$x^2(x-3) - (x-3) = 0$
$(x-3)\left(x^2-1\right) = 0$
$(x-3)(x-1)(x+1) = 0$
$x = 3$ lub $x = 1$ lub $x = (-1)$.
- Zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$
- Możemy to zapisać inaczej: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$.
- Możemy też podać, że $x \neq (-1)$ i $x \neq 1$ i $x \neq 3$.

Przykład 3

Podamy dziedzinę wyrażenia $\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+2}{x+3}}$.

Rozwiązanie

- Ułamek ten będzie określony, gdy mianowniki ułamków $\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+2}{x+3}}$, $\frac{x}{x+1}$ i $\frac{x+2}{x+3}$ będą różne od 0.
- Oznacza to, że $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0. \\ x+3 \neq 0 \end{cases}$
- Możemy zatem stwierdzić, że $\begin{cases} x \neq (-1) \\ x \neq (-2). \\ x \neq (-3) \end{cases}$
- Zapisując inaczej: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}$.

Przykład 4

Podamy dziedzinę wyrażenia $\frac{\sqrt{x+3}}{x^2+3x-4}$.

Rozwiązanie

- Sprowadźmy mianownik do postaci iloczynowej:
$\frac{\sqrt{x+3}}{x^2+3x-4} = \frac{\sqrt{x+3}}{(x-1)(x+4)}$.

- Ułamek jest określony, gdy mianownik jest liczbą różną od zera, a pod pierwiastkiem mamy liczbę nieujemną:
$\begin{cases} (x-1)(x+4) \neq 0 \\ x+3 \geqslant 0 \end{cases}$.

- Zatem $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq (-4) \\ x \geqslant (-3) \end{cases}$.

- Podsumowując: $\begin{cases} x \geqslant (-3) \\ x \neq 1 \end{cases}$.

- Możemy zapisać, że $x \in \langle -3, 1) \cup (1, \infty)$
lub równoważnie $x \in \langle -3, \infty) \setminus \{1\}$.

W kolejnych przykładach zajmiemy się wyznaczeniem i zapisaniem dziedziny wyrażenia algebraicznego w formie ułamka z więcej niż jedną niewiadomą.

Przykład 5

Określimy dziedzinę wyrażenia $\frac{x^2y}{y^2z}$.

Rozwiązanie

- Wyrażenie jest określone, gdy mianownik przyjmuje wartości różne od zera.

- Zatem $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przykład 6

Określimy dziedzinę wyrażenia $\frac{xy-5z}{xz+yz+4x+4y}$.

Rozwiązanie

- Musimy ustalić, kiedy mianownik wyrażenia przyjmuje wartości różne od 0.
Zauważmy, że mianownik łatwo zapisać w postaci iloczynowej:
$xz + yz + 4x + 4y = z(x + y) + 4(x + y) = (x + y)(z + 4)$

- Zatem $\begin{cases} x+y \neq 0 \\ z+4 \neq 0 \end{cases}$.

- Ułamek jest zatem określony, gdy spełnione są jednocześnie następujące warunki:
$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \setminus \{-4\} \\ x \neq (-y) \end{cases}.$

Przykład 7

Określimy dziedzinę wyrażenia $\frac{1}{a^2-2ab+b^2}$.

Rozwiązanie

- Stosując wzór skróconego mnożenia możemy zapisać
$\frac{1}{a^2-2ab+b^2} = \frac{1}{(a-b)^2}$.

- Zatem $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ a \neq b \end{cases}.$

Przykład 8

Określimy dziedzinę wyrażenia $\frac{1}{a^2-2ab+3b^2}$.

Rozwiązanie

- Przekształćmy mianownik stosując wzór skróconego mnożenia:
$\frac{1}{a^2-2ab+3b^2} = \frac{1}{(a-b)^2+2b^2}$.

- Wyrażenia $(a-b)^2$ oraz $2b^2$ są zawsze nieujemne - więc ich suma również.
Wyrażenie w mianowniku może przyjąć wartość 0 tylko, gdy
$\begin{cases} a-b=0 \\ b=0 \end{cases},$
czyli tylko dla $a = b = 0$.

- Ułamek $\frac{1}{a^2-2ab+3b^2}$ jest więc określony, gdy
$\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ a \neq 0 \text{ lub } b \neq 0 \end{cases}.$

- Równoważnie można to zredagować np. tak:
$\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}.$

Słownik

dziedzina wyrażenia algebraicznego

wszystkie liczby rzeczywiste, dla których to wyrażenie ma sens liczbowy

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z sześcioma przykładami wyznaczenia dziedziny wyrażeń algebraicznych zapisanych w formie ułamka.

Polecenie 2

Wyznacz dziedzinę wyrażeń algebraicznych zapisanych w postaci ułamka:

- $\frac{f-4}{f^3-f}$
- $\frac{\sqrt{x^2-x-6}}{\sqrt{x^2+2x-3}}$
- $\frac{1}{9a^2-12ab+4b^2}$
- $\frac{\log_{p+2} 3}{\log_4(q^2-1)}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wskaż dziedzinę wyrażenia $\frac{2x+1}{(x-2)(3x-1)}$.

- $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$
- $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$
- $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$
- $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}, -2\right\}$

Ćwiczenie 2

Wskaż liczby **nie należące** do dziedziny wyrażenia $\frac{5x+1}{(x-5)(4x-3)}$.

- $\frac{3}{4}$
- -5
- 5
- $\frac{4}{3}$

Ćwiczenie 3

Połącz w pary wyrażenia wymierne o tej samej dziedzinie.

$\frac{x+2}{(3x-1)(2x+6)}$	$\frac{x+10}{(2x-4)(2x-1)}$
$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+2)}$	$\frac{2x}{(3x-9)(9x+6)}$
$\frac{x-1}{(3x+2)(x-3)}$	$\frac{4}{(3x-3)(2x+4)}$
$\frac{x^4}{(x-2)(8x-4)}$	$\frac{3x^2+2}{(x+3)(6x-2)}$

Ćwiczenie 4

Połącz w pary wyrażenia wymierne o tej samej dziedzinie.

$\frac{x}{(x-4)(2x-1)(x+3)}$	$\frac{3x-7}{(x+1)(3x+2)(2x+6)}$
$\frac{x^2-x-6}{(2x-6)(x+1)(x+3)}$	$\frac{5x-10}{(2x-8)(3x+9)(4x-2)}$
$\frac{x^2+5}{(3x+2)(x+3)(4x+4)}$	$\frac{x-5}{(x+3)(x-3)(2x+2)}$

Ćwiczenie 5

Uzupełnij zapis dziedziny wyrażenia $\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{7-y}}{\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{y-2}}$.

- $x \in \langle$ ____ ; ____ $)$
- $y \in ($ ____ ; ____ $\rangle$

Ćwiczenie 6

Dla każdego ułamka dobierz wyrażenie opisujące jego dziedzinę

$\frac{x^2-1}{y^2+1}$	$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ y \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{cases}$
$\frac{x+1}{y^2-1}$	$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$
$\frac{x^2+2x+1}{y^2-2y+1}$	$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{cases}$
$\frac{y^2+2y+1}{x^2+2x+1}$	$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$
$\frac{x^2+2x+1}{y^2+2y+1}$	$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \end{cases}$
$\frac{2xy}{xy-x+y-1}$	$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{cases}$

Ćwiczenie 7

Wskaż zapis opisujący dziedzinę wyrażenia $\frac{\frac{p}{q}}{\frac{p^2+2pq+q^2}{p^2-q^2}}$

- $\begin{cases} p \in \mathbb{R} \\ q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ p \neq q \end{cases}$
- $\begin{cases} p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ p \neq q \end{cases}$
- $\begin{cases} p \in \mathbb{R} \\ q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ p \neq q \\ p \neq (-q) \end{cases}$
- $\begin{cases} p \in \mathbb{R} \\ q \in \mathbb{R} \\ p \neq q \end{cases}$
- $\begin{cases} p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ p \neq q \\ p \neq (-q) \end{cases}$
- $\begin{cases} p \in \mathbb{R} \\ q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ p \neq (-q) \end{cases}$

Ćwiczenie 8

Wskaż zapis opisujący dziedzinę wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4x^2}-\frac{y}{x}+y^2}}$.

- $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R} \\ x + y \neq 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R} \\ xy \neq \frac{1}{2} \end{cases}$
- $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R} \\ x \neq 2y \end{cases}$
- $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R} \\ xy \neq 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R} \\ 2x \neq y \end{cases}$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyznaczanie dziedziny ułamków algebraicznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje nabyte w trakcie nauki umiejętności rozwiązywania równań do wyznaczania dziedziny ułamków algebraicznych.
- zapisuje dziedziny ułamków algebraicznych na różne sposoby.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda śnieżnej kuli;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” i ćwiczenia interaktywne;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają definicję dziedziny.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi sposobów ustalenia, dla jakich wartości zmiennych występujących w mianowniku ułamka mianownik ten może osiągnąć wartość zero, które przypomnieli w domu. Następnie łączą się w grupy 4 osobowe omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie zapoznają się z galerią zdjęć interaktywnych i analizują przykłady pokazujące sposoby wyznaczenia dziedziny wyrażeń algebraicznych zapisanych w formie ułamka.
3. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują Polecenie 2 umieszczone pod galerią zdjęć interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Wyrażenia wymierne. Równania wymierne

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w galerii zdjęć interaktywnych uczniowie mogą przeanalizować przed zajęciami, jeżeli nauczyciel chciałby poprowadzić lekcję metodą klasy odwróconej.