Własności okręgu opisanego na trójkącie

Źródło: Thomas Diroma, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Na każdym trójkącie można opisać okrąg. Środek tego okręgu znajduje się na przecięciu symetralnych boków tego trójkąta. Po położeniu środka okręgu opisanego na trójkącie, można rozpoznać, z jakim trójkątem mamy do czynienia: ostrokątnym, prostokątnym, czy rozwartokątnym. W tym materiale poznasz własności okręgu opisanego na trójkącie.

Twoje cele

- Obliczysz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie, znając długość jednego z boków oraz miarę kąta leżącego naprzeciw danego boku.
- Obliczysz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie znając wszystkie długości jego boków.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Na początku przeanalizujemy własności okręgu opisanego na trójkącie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DeDBzXJiR

Film nawiązujący do treści materiału. Własności okręgu opisanego na trójkącie.

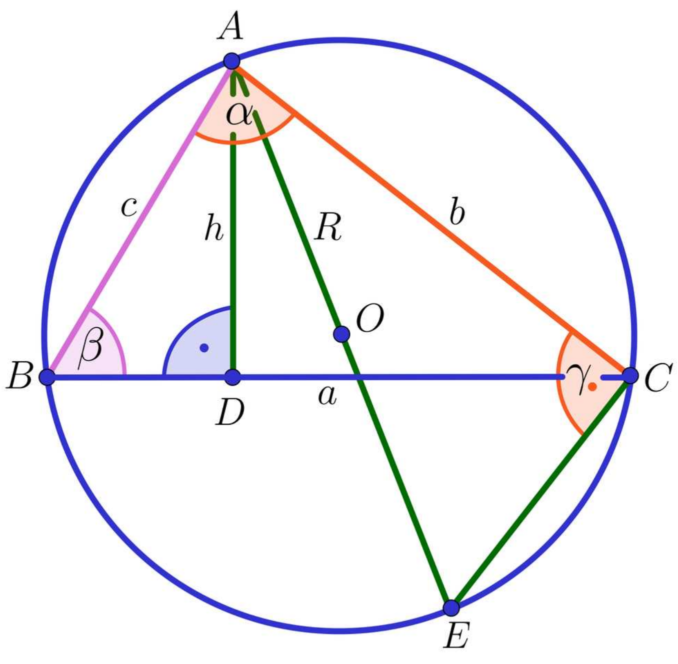
Przykład 1

Wykorzystując własności kątów wpisanych udowodnimy, że pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Trójkąt ABC o bokach długości a, b, c jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu R. Odcinek AD jest wysokością trójkąta, a odcinek AE jest średnicą okręgu. Kąty ABC oraz AEC są kątami wpisanymi, opartymi na tym samym łuku, zatem mają takie same miary. Stąd trójkąty ABD i AEC są podobne, czyli: $\frac{h}{c} = \frac{b}{2R}$, zatem $h = \frac{bc}{2R}$.

$$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{bc}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Warto przypomnieć **wzór Herona**, który pozwala obliczyć pole dowolnego trójkąta, gdy znamy długości wszystkich jego boków.

Jeżeli $0 < a \leq b \leq c$ są długościami boków trójkąta oraz $p = \frac{a+b+c}{2}$, to pole trójkąta możemy obliczyć ze wzoru:

$$P_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Przykład 2

Obliczymy pole trójkąta wpisanego w okrąg, którego boki są długości: $4\ \text{cm}$, $13\ \text{cm}$ i $15\ \text{cm}$, wiedząc, że promień tego okręgu jest równy $8,125\ \text{cm}$.

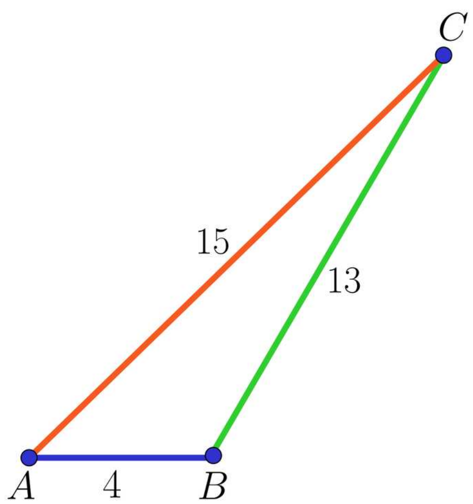
Rozwiązanie

I sposób:

Korzystając ze wzoru $P = \frac{abc}{4R}$, otrzymujemy:

$P = \frac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 8{,}125} = \frac{780}{32{,}5} = 24\ \left[\text{cm}^2\right]$

II sposób:



Korzystając ze wzoru Herona najpierw obliczymy $p = \frac{4+13+15}{2} = 16\ [\text{cm}]$.

Zatem pole tego trójkąta jest równe:

$P_{\triangle} = \sqrt{16(16-4)(16-13)(16-15)} = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{16 \cdot 36} =$

$= 4 \cdot 6 = 24\ \left[\text{cm}^2\right]$.

Przykład 3

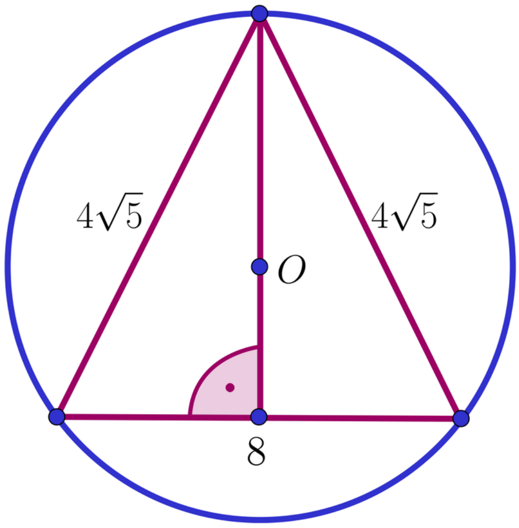
Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 cm i ramieniu długości $4\sqrt{5} \text{ cm}$.

Rozwiązanie

Sprawdzimy jakim trójkątem jest trójkąt o podanych długościach, by poprawnie wykonać rysunek pomocniczy:

$\left(4\sqrt{5}\right)^2 + 8^2 > \left(4\sqrt{5}\right)^2$, zatem jest to trójkąt ostrokątny, środek okręgu opisanego na nim leży wewnątrz trójkąta.

I **sposób:**



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczymy wysokość trójkąta opuszczoną na podstawę:

$h^2 + 4^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2$

$h^2 + 16 = 80$

$h^2 = 64$

$h = 8 \ [\text{cm}]$

Możemy już obliczyć pole tego trójkąta

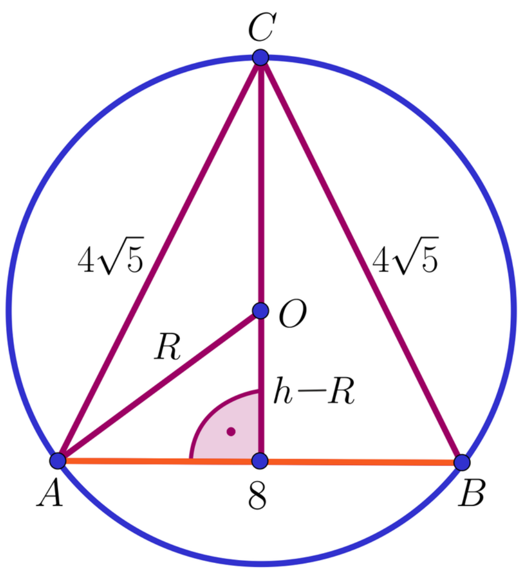
$P = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32 \ \left[\text{cm}^2\right]$

Przekształcając poznany wzór $P = \frac{abc}{4R}$, obliczymy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie

$R = \frac{abc}{4P}$

$R = \frac{4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 8}{4 \cdot 32} = 5 \text{ [cm]}$

II **sposób:**



Zauważmy, że mamy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $h - R = 8 - R$, 4 oraz przeciwprostokątnej R.

Stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy

$(8 - R)^2 + 4^2 = R^2$

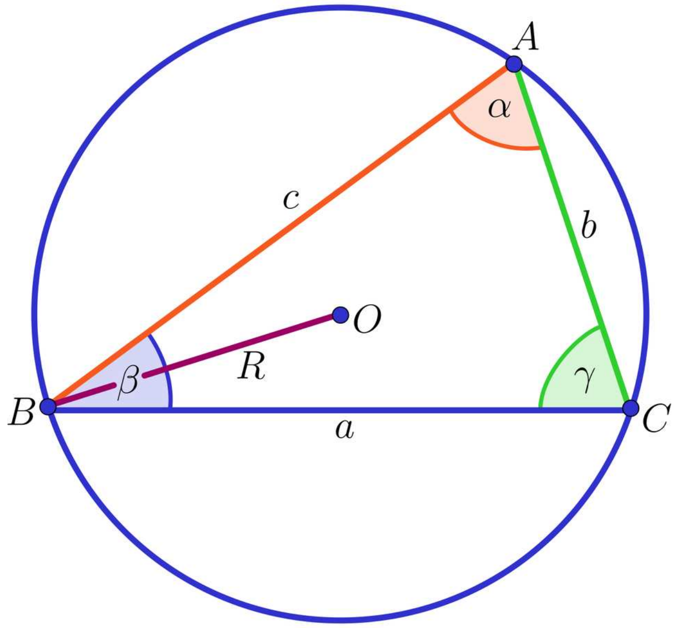
$64 - 16R + R^2 + 16 = R^2$

$80 = 16R$

$R = 5 \text{ [cm]}$

Przypomnimy teraz:

Twierdzenie: sinusów



W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Przykład 4

Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie, w którym jeden z boków ma długość $10\ \text{cm}$, a przeciwległy do niego kąt ma miarę 30°.

Rozwiązanie

Korzystając z twierdzenia sinusów wiemy, że stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw jest równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie, zatem

$2R = \frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$

Stąd $R = 10\ [\text{cm}]$.

Przykład 5

Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o kątach 60° i 75° oraz boku przy tych kątach długości 12.

Rozwiązanie

Suma kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180°.

Zatem miara trzeciego kąta wynosi $180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$.

Naprzeciw kąta o mierze 45° leży bok długości 12.

Zatem: $2R = \frac{12}{\sin 45^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12\sqrt{2}$

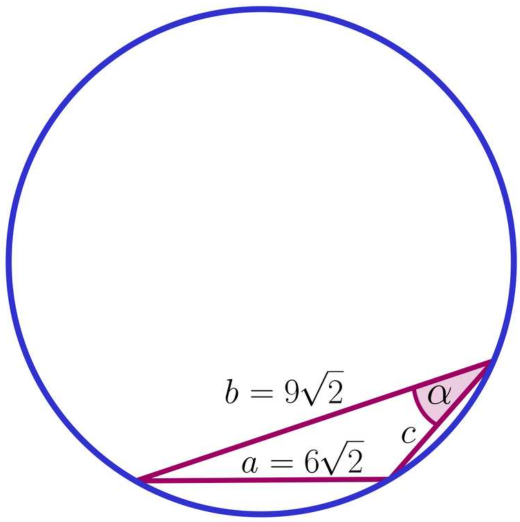
Z powyższego wynika, że $R = 6\sqrt{2}$.

Przykład 6

Dwa boki trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu długości $R = 6\sqrt{2}$ mają długości $a = 6\sqrt{2}$ i $b = 9\sqrt{2}$. Obliczymy długość trzeciego boku tego trójkąta.

Rozwiązanie

Niech α będzie kątem leżącym naprzeciw boku a, zaś c – długością szukanego boku.



Z twierdzenia sinusów:

$\frac{6\sqrt{2}}{\sin \alpha} = 12\sqrt{2}$.

Stąd: $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, co daje: $\alpha = 30^\circ$.

Z twierdzenia cosinusów:

$\left(6\sqrt{2}\right)^2 = c^2 + \left(9\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot c \cdot 9\sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ$

$72 = c^2 + 162 - 2 \cdot c \cdot 9\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2 - 9\sqrt{6}c + 90 = 0$

$\Delta = 486 - 360 = 126$

$\sqrt{\Delta} = 3\sqrt{14}$

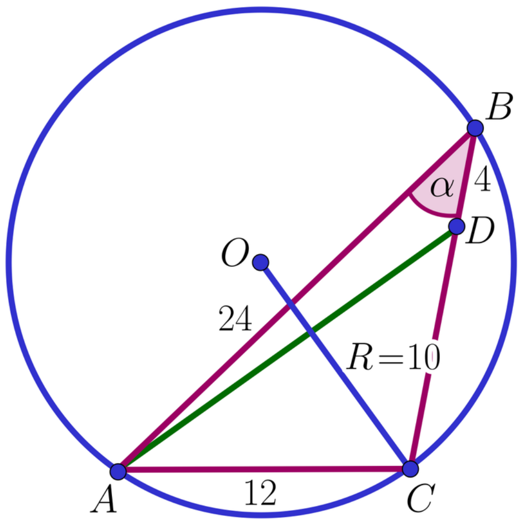
$c_1 = \frac{9\sqrt{6}-3\sqrt{14}}{2}$ lub $c_2 = \frac{9\sqrt{6}+3\sqrt{14}}{2}$

Przykład 7

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest ostry. Długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 10 oraz $|AC| = 12$, $|AB| = 24$. Na boku BC wybrano taki punkt D, że $|BD| = 4$. Obliczymy długość odcinka AD.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Zastosujemy twierdzenie sinusów w trójkącie ABC:

$\frac{12}{\sin\alpha} = 2R$

Zatem: $\sin\alpha = \frac{12}{20} = 0,6$.

Wyznaczymy wartość cosinusa kąta α:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(0,6)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 0,64$

$\cos\alpha = 0,8$ lub $\cos\alpha = -0,8$.

Ponieważ $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$, to $\cos\alpha = 0,8$.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ABD:

$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos\alpha$

$|AD|^2 = 24^2 + 4^2 - 2 \cdot 24 \cdot 4 \cdot 0,8$

$|AD|^2 = 438,4$

$|AD| = \sqrt{438,4}$

Ważne!

Jeżeli nie zostanie podane, że jest inaczej, przyjmujemy, że boki trójkąta o długości: a, b, c leżą odpowiednio naprzeciw kątów: α, β, γ.

Słownik

trójkąt wpisany w okrąg

trójkąt jest wpisany w okrąg, gdy wszystkie jego wierzchołki leżą na okręgu; mówimy wówczas, że okrąg jest opisany na trójkącie; promień takiego okręgu oznaczamy przez R

promień okręgu opisanego na trójkącie

jest to długość odcinka łączącego środek tego okręgu z dowolnym wierzchołkiem trójkąta, oznaczamy go przez R

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Prześledź zależność między długością boku a sinusem kąta leżącego naprzeciw tego boku, a następnie wykonaj poniższe polecenia. Zmieniając położenie wierzchołków trójkąta w poniższej symulacji interaktywnej samodzielnie decydujesz, jakiemu trójkątowi się przyglądasz.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DGXNQz7l4

Polecenie 2

Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli $|BC| = 4$, $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$.

Polecenie 3

Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta ABC, jeżeli $|AB| = \sqrt{6}$, $|BC| = 3$, $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$.

Polecenie 4

W trójkącie ABC, wpisanym w okrąg o promieniu 6 cm, dane są miary dwóch kątów: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Oblicz obwód tego trójkąta.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Oblicz obwód okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o ramionach długości 12 i kącie między nimi o mierze 30°.

Ćwiczenie 6

Oblicz długości pozostałych boków i miary kątów trójkąta ABC, jeżeli $b = 20$, $c = 20\sqrt{3}$, $\gamma = 120^\circ$. Kąt γ leży naprzeciw boku c.

Ćwiczenie 7

W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 15\sqrt{2}$, $|\sphericalangle BAC| = 65^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 70^\circ$. Oblicz długość promienia okręgu, w który wpisano ten trójkąt.

Ćwiczenie 8

Na trójkącie, którego 2 boki mają długości: 12 i $4\sqrt{6}$ opisano okręg o promieniu długości $4\sqrt{3}$. Wyznacz długość trzeciego boku tego trójkąta.

Ćwiczenie 9

Trójkąt równoramienny, którego wysokość opuszczona na podstawę ma długość 12 wpisano w koło o średnicy $\frac{100}{3}$. Wyznacz długość podstawy tego trójkąta.

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Alabrudzińska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności okręgu opisanego na trójkącie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza długość promienia okręgu opisanego na trójkącie znając długość jednego z boków oraz miarę kąta leżącego naprzeciwko danego boku;

- oblicza długość promienia okręgu opisanego na dowolnym trójkącie, znając wszystkie długości jego boków;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli;
- lekcja odwrócona.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca w parach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu;
- projektor multimedialny;

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się w domu z filmem z sekcji „Przeczytaj” oraz pierwszymi dwoma przykładami z tej sekcji.

Faza wstępna:

- Nauczyciel prosi uczniów, by na podstawie wiadomości zdobytych przed lekcją zaproponowali cel zajęć oraz kryteria sukcesu.
- Uczniowie tworzą mapę myśli z informacjami dotyczącymi okręgu opisanego na trójkącie.

Faza realizacyjna:

- Nauczyciel wyświetla symulację interaktywną i omawia zależność między promieniem okręgu opisanego na trójkącie a długościami jego boków i sinusami odpowiednich kątów.
- Wybrani uczniowie rozwiązują polecenia 2 – 4 z sekcji „Symulacja interaktywna”.

- Uczniowie w parach analizują przykłady z sekcji „Przeczytaj”, których nie przeanalizowali w domu. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości.
- Nauczyciel dzieli klasę na grupy trzyosobowe. Uczniowie w grupach wykonują ćwiczenia 1 – 6 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

- Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/em się...” oraz wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

- Uczniowie jako zadanie domowe wykonują ćwiczenia 7, 8, 9 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Okrąg opisany na trójkącie

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną można wykorzystać na zajęciach poświęconych twierdzeniu sinusów.