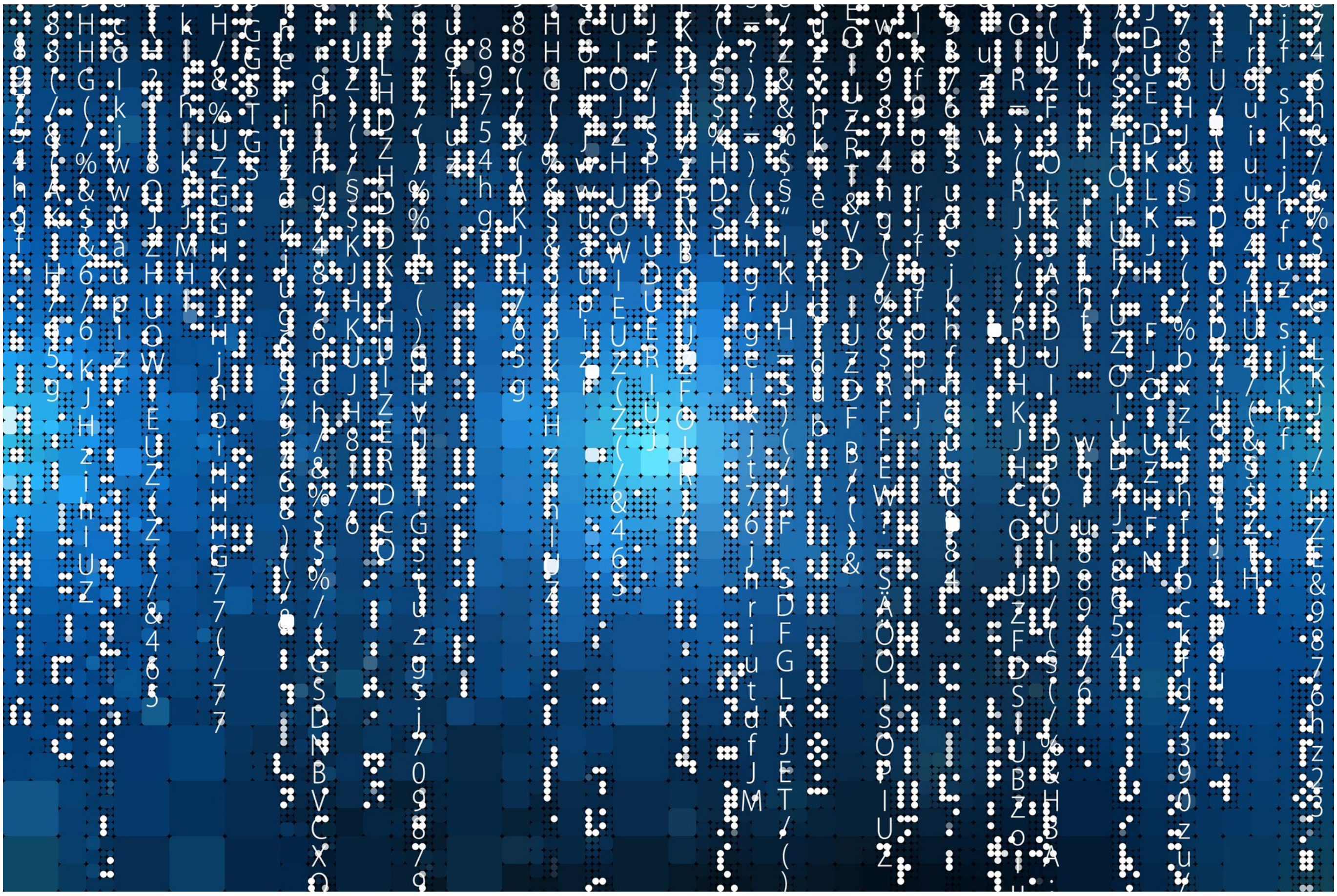
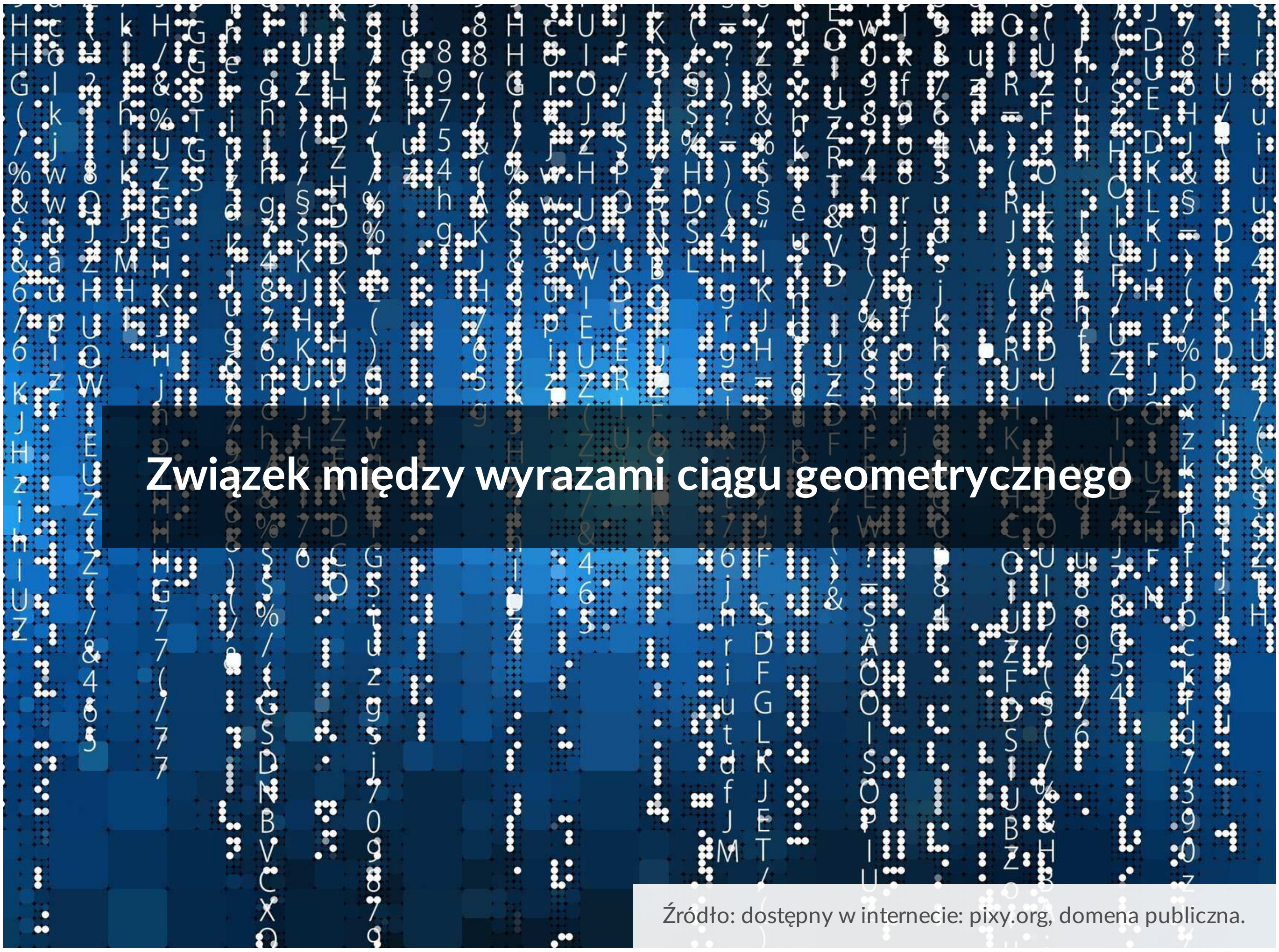


Związek między wyrazami ciągu geometrycznego

Związek między wyrazami ciągu geometrycznego



Źródło: dostępny w internecie: pixy.org, domena publiczna.

Pojęcie algorytmu jest jednym z podstawowych pojęć matematycznych. Przez algorytm rozumiany jest dokładny przepis wykonania w określonym porządku skończonego układu operacji w celu rozwiązania zagadnienia określonego typu.

Algorytm powinien być tak zbudowany, aby prezentowaną metodę obliczenia można było powtórzyć w dowolnym czasie i otrzymać ten sam wynik.

Najprostszymi algorytmami są pojedyncze wzory. I właśnie jeden taki mini – algorytm poznamy w tym materiale.
Będzie to sposób znajdowania jednego z trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, gdy dane są pozostałe dwa wyrazy.

> **Twoje cele**
>
> - Odkryjesz związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
> - Znajdziesz brakujące wyrazy ciągu geometrycznego, korzystając ze związku między wyrazami ciągu.
> - Rozwiązując problemy dotyczące ciągu geometrycznego i ciągu arytmetycznego, skorzystasz z poznanych twierdzeń i wniosków.

Przeczytaj

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q, zwaną ilorazem ciągu.

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 0$, to dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Weźmy pod uwagę wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} tego ciągu.

Wtedy:

$$a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2},$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n.$$

Rozważmy iloczyn tych wyrazów i skorzystajmy z własności iloczynu potęg o tych samych podstawach.

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot a_1 \cdot q^n = a_1^2 \cdot q^{2n-2}$$

Teraz skorzystamy z własności potęgowania potęgi.

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \left(a_1 \cdot q^{n-1}\right)^2$$

Zauważmy, że $a_1 \cdot q^{n-1} = a_n$. Zatem:

$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (a_n)^2$ dla $n > 1$.

Uzyskaną równość najczęściej zapisujemy w postaci:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}.$$

Możemy więc powiedzieć:

w ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu, oprócz pierwszego (i ostatniego, jeśli ciąg jest skończony), jest równy iloczynowi wyrazów sąsiednich.

Natomiast, jeśli spełniona jest równość $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, gdzie $n > 1$ dla wyrazów (zakładamy, że wyrazy sa różne od zera) ciągu (a_n), to ciąg ten jest ciągiem geometrycznym.

Gdyż równość tę możemy przekształcić do postaci:

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, gdzie $n > 1$.

Z powyższego zapisu możemy wnioskować, że ilorazy kolejnych wyrazów ciągu (a_n) są równe, a to oznacza, że jest to ciąg geometryczny.

Rozważania doprowadziły nas do sformułowania zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Twierdzenie: Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat każdego wyrazu, oprócz wyrazu pierwszego (i ostatniego, w przypadku ciągu skończonego), jest iloczynem dwóch wyrazów sąsiednich – poprzedniego i następnego

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1},$$

gdzie:
$n > 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że jeśli wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$.

Wniosek:

W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich każdy wyraz, oprócz wyrazu pierwszego (i ostatniego, jeżeli ciąg jest skończony), jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich – poprzedniego i następnego.

Przykład 1

Liczby 4, x, 9 są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznaczymy x.

Liczba x jest środkowym wyrazem ciągu, zatem:

$x^2 = 4 \cdot 9$

$x^2 = 36$

$x = 6$ lub $x = -6$

Odpowiedź:

Szukana liczba jest równa -6 lub -6.

Przykład 2

Liczby -5, x, y, 40 są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znajdziemy liczby x, y.

Zapisujemy równania, wynikające ze związku między kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

$$\begin{cases} x^2 = -5y \\ 40x = y^2 \end{cases}$$

Zauważmy, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Możemy więc podzielić stronami równania układu.

$$\frac{x}{40} = \frac{-5}{y}$$

Wyznaczamy x i wstawiamy do drugiego równania układu.

$$x = \frac{-200}{y}$$

$$y^2 = 40 \cdot \left(\frac{-200}{y}\right)$$

Wyznaczamy y.

$$y^3 = -8000$$

$$y = -20$$

Wyznaczamy x.

$$x = \frac{-200}{-20} = 10$$

Odpowiedź:

Szukane liczby to $x = 10$, $y = -20$.

Jeżeli wyrazy ciągu geometrycznego są dodatnie, to wniosek dotyczący zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, można uogólnić. Zapiszemy to uogólnienie również w postaci wniosku.

Wniosek:

Jeżeli wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są dodatnie, to:

$$a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}},$$

gdzie:
$k < n, k \in \mathbb{N}_+, n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 3

Liczby $2, x, y, z, 8$ w tej kolejności tworzą ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Znajdziemy wzór ogólny ciągu i sumę wszystkich wyrazów ciągu.

Zauważmy, że wyraz y znajduje się w tej samej odległości od 2 i 8. Skorzystamy zatem z wniosku zapisanego przed przykładem.

$y = \sqrt{2 \cdot 8}$

$y = 4$

Wyznaczamy wyrazy x oraz z.

$x = \sqrt{2y} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$z = \sqrt{8y} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Obliczymy iloraz ciągu.

$q = \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$a_n = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$

Obliczamy sumę wszystkich wyrazów ciągu.

$S = 2 + 2\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{2} + 8 = 14 + 6\sqrt{2}$

Odpowiedź:

Wzór ogólny ciągu to $a_n = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$, a suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa $14 + 6\sqrt{2}$.

W następnych przykładach pokażemy, jak można wykorzystać w zadaniach zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, ale również zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Przykład 4

Między liczby -2 i 25 należy wpisać takie dwie liczby, aby trzy pierwsze utworzyły ciąg arytmetyczny, a trzy ostatnie – ciąg geometryczny.

Oznaczmy:
x, y – liczby, które wstawiamy między liczby -2 i 25.

Otrzymujemy:

$(-2,\ x,\ y)$ – ciąg arytmetyczny,

$(x,\ y,\ 25)$ – ciąg geometryczny.

Z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego wynika, że:

$x = \frac{-2+y}{2}$

Z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego wynika, że:

$y^2 = 25x$

Zapisujemy uzyskany układ równań:

$$\begin{cases} x = \frac{-2+y}{2} \\ y^2 = 25x \end{cases}$$

Podstawiamy do drugiego z równań w miejsce x wyrażenie z pierwszego równania.

$$\begin{cases} x = \frac{-2+y}{2} \\ y^2 = 25 \cdot \frac{-2+y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-2+y}{2} \\ 2y^2 - 25y + 50 = 0 \end{cases}$$

Drugie z równań układu jest równaniem kwadratowym z jedną niewiadomą. Rozwiążemy najpierw to równanie.

$2y^2 - 25y + 50 = 0$

$\Delta = 225$

$y = \frac{25-15}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ lub $y = \frac{25+15}{4} = 10$

Powracamy do układu równań.

$$\begin{cases} x = \frac{-2+y}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{-2+y}{2} \\ y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 4 \\ y = 10 \end{cases}$$

Odpowiedź:

Warunki zadania spełniają dwie pary liczb: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$ oraz 4, 10.

Przykład 5

Liczby dodatnie x, y, z, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny. Liczby dodatnie x, w, z, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny. Wykażemy, że

$x + y + z \geq x + w + z.$

Nierówność $x + y + z \geq x + w + z$ jest równoważna nierówności $y \geq w$. Wystarczy więc udowodnić, że $y \geq w$.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych, a więc i dla liczb x, z prawdziwa jest nierówność

$(x - z)^2 \geq 0$

Zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci sumy.

$x^2 - 2xz + z^2 \geq 0$

Do obu stron nierówności dodajemy $4xz$.

$x^2 - 2xz + z^2 + 4xz \geq 4xz$

Lewą stronę nierówności zapisujemy w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń.

$(x + z)^2 \geq 4xz$

Przekształcamy nierówność równoważnie, korzystając z tego, że liczby x i z są dodatnie.

$x + z \geq 2\sqrt{xz}$

Dzielimy obie strony nierówności przez 2.

$\frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz}$

Z zależności między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego $(x,\ y,\ z)$ wynika, że $y = \frac{x+z}{2}$.

Z zależności między kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego $(x,\ w,\ z)$ wynika, że $w = \sqrt{xz}$.

Czyli:

$y \geq w$

Udowodniliśmy więc, że $y \geq w$, co kończy dowód.

Zauważmy jeszcze, że $x + y + z = x + w + z$, gdy ciągi są stałe.

Słownik

zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego

ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat każdego wyrazu, oprócz wyrazu pierwszego (i ostatniego, w przypadku ciągu skończonego), jest iloczynem dwóch wyrazów sąsiednich – poprzedniego i następnego

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1},$$

gdzie:
$n > 1$ i $n \in \mathbb{N}$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Najpierw samodzielnie spróbuj wyznaczyć związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, a następnie porównaj swoje wnioski z prezentowanymi w animacji.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1pZ1E5a4

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący związku między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Polecenie 2

Znajdź taką liczbę x, dla której ciąg $(-6,\ x,\ -18)$ jest ciągiem geometrycznym.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Liczby a, b, c w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny o wyrazach niezerowych.

Jeżeli do pierwszej z tych liczb dodać 1, a ostatnią z tych liczb podzielić przez 2, to otrzymane liczby w niezmienionej kolejności utworzą również ciąg geometryczny. Znajdź te liczby, jeżeli wiadomo, że liczba b jest o 3 większa od liczby a.

Ćwiczenie 8

Wykaż, że jeśli w ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich średnia geometryczna wyrazów a_4 i a_6 jest równa wyrazowi a_2, to ciąg ten jest ciągiem stałym.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Związek między wyrazami ciągu geometrycznego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odkrywa związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego
- znajduje brakujące wyrazy ciągu geometrycznego, korzystając ze związku między wyrazami ciągu
- rozwiązuje problemy dotyczące ciągu geometrycznego i arytmetycznego, korzystając z poznanych twierdzeń i wniosków

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- praca z ekspertem metodą stolików zadaniowych

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Krótkie powtórzenie wiadomości na temat ciągu geometrycznego – nauczyciel wyznacza 3 uczniów, którzy na przemian odpowiadają na pytania zadawane przez koleżanki i kolegów (zadający pytania mogą korzystać z zeszytów i książek). Odpowiadający uczniowie zostają nagrodzeni „plusami" lub ukarani „minusami".
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wspólnie oglądają animację, nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe kwestie.
2. Uczniowie pracują w 5 grupach metodą stolików zadaniowych. Przy każdym stoliku siedzi ekspert, który w domu przygotował jedno z zagadnień omawianych w sekcji „Przeczytaj" (według problemów podanych w kolejnych Przykładach). Opracował też swoje zadania podobnego typu. Jego zadaniem jest zapoznanie każdej grupy z danym problemem i pokazanie sposobu rozwiązywania zadań danego typu. Może wspomagać się przygotowaną wcześniej przez siebie prezentacją lub przygotowanymi ćwiczeniami interaktywnymi.
3. Po zapoznaniu się z zagadnieniami przy wszystkich stolikach, uczniowie wspólnie sporządzają mapę myśli obrazującą typy zadań związanych z zależnościami między trzema wyrazami ciągu geometrycznego.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Eksperci – uczniowie „odpowiedzialni" za poszczególne stoliki komentują pracę grup, zwracając szczególną uwagę na sposób pracy grup, wzajemne relacje między uczniami, itp.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Ciąg geometryczny

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać w tematach związanych z dowodzeniem twierdzeń.