



Podzbiory zbioru skończonego (treść rozszerzona)

Ustalanie na ile sposobów z ustalonego zbioru można wybrać podzbiór o konkretnej liczbie elementów. Definicja liczby k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego.

Przykłady z zakresu rozszerzonego.

Obliczanie liczby wszystkich podzbiorów zbiorów skończonych. Przykłady z zakresu rozszerzonego.

Twierdzenie: k -elementowa kombinacja zbioru n -elementowego. Przykłady na zastosowanie twierdzenia o liczbie kombinacji. Zakres rozszerzony.

Wyprowadzenie wzoru na $(x+1)$ do potęgi czwartej. Wyprowadzanie wzoru na dwumianowy Newtona. Zakres rozszerzony.

Podzbiory zbioru skończonego (treść rozszerzona)

W tym materiale zawarte są wiadomości na temat sposobów wyznaczania podzbiorów zbioru skończonego. Poznasz:

- wzór na liczbę podzbiorów zbioru n – elementowego,
- definicję kombinacji,
- wzór na liczbę k – elementowych kombinacji zbioru n – elementowego,
- wzór dwumianowy Newtona.

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru skończonego

Można obliczyć, ile jest wszystkich podzbiorów pewnych zbiorów skończonych.

- pewien zbiór dwuelementowy ma $2^2 = 4$ podzbiory,
- pewien zbiór czteroelementowy ma $2^4 = 16$ podzbiorów,
- pewien zbiór pięcioelementowy ma $2^5 = 32$ podzbiory,
- pewien zbiór dziewięcioelementowy ma $2^9 = 512$ podzbiorów.

Ustalając liczbę podzbiorów, można zauważyć, że w stosunku do każdego elementu zbioru możemy na dwa sposoby podjąć decyzję o jego wyborze do tworzonego podzbioru.

Przykład 1

Rozpatrzmy teraz zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, który ma n elementów. Dowolny podzbiór zbioru A tworzymy, podejmując decyzję, czy każdy z kolejnych elementów zbioru A : $a_1, a_2, \dots, a_n$ należy do tego podzbioru, czy nie należy. Można to zrobić na $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ czynników}} = 2^n$ sposobów.

Zatem liczba wszystkich podzbiorów zbioru A , który ma n elementów, jest równa 2^n .

Liczba kombinacji

Często spotykamy się z koniecznością obliczenia, na ile sposobów możemy z ustalonego zbioru wybrać podzbiór o konkretnej liczbie elementów.

Przykład 2

Rozpatrzmy zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ elementów. Wtedy:

- jest jeden podzbiór zbioru A , do którego nie wybierzemy żadnego elementu ze zbioru A (tym podzbiorem jest zbiór pusty),
- jest jeden podzbiór zbioru A , do którego wybierzemy każdy element zbioru A (tym podzbiorem jest cały zbiór A),
- jest n wszystkich podzbiorów jednoelementowych zbioru A ,

- jest $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ wszystkich podzbiorów dwuelementowych zbioru A .

Zgodnie z metodą dopełniania podzbiorów do całego zbioru i zasadą równoliczności, możemy stwierdzić też, że

- jest n wszystkich podzbiorów $(n-1)$ -elementowych zbioru A ,
- jest $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ wszystkich podzbiorów $(n-2)$ -elementowych zbioru A .

Definicja: liczba k - elementowych podzbiorów zbioru n - elementowego

Rozpatrzmy zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, który ma n ($n \geq 1$) elementów.

Symbolem $\binom{n}{k}$ oznaczamy liczbę jego wszystkich podzbiorów k - elementowych ($k \geq 0$) i ($k \leq n$).

Zapis symboliczny $\binom{n}{k}$ odczytujemy „ n po k ”, stąd np.:

- $\binom{5}{2}$ czytamy „pięć po dwa”,
- $\binom{7}{1}$ czytamy „siedem po jeden”,
- $\binom{6}{0}$ czytamy „sześć po zero”.

Stosując to oznaczenie, stwierdzimy, że:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2},$$

gdy $n \geq 2$.

W szczególności:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10, \quad \binom{5}{3} = 10,$$

$$\binom{7}{1} = 7, \binom{7}{6} = 7,$$

$$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1.$$

Rozszerza się też (z czego my nie będziemy korzystać) stosowanie tego symbolu na:

- podzbiór pustego zbioru pustego, przyjmując $\binom{0}{0} = 1$,
- przypadek, gdy $k > n$, wtedy przyjmujemy $\binom{n}{k} = 0$.

Kombinacje

Definicja: k – elementowa kombinacja zbioru n – elementowego

Każdy k – elementowy podzbiór zbioru n – elementowego ($0 \leq k \leq n$) nazywa się zwyczajowo k – elementową kombinacją zbioru n – elementowego.

Pokażemy, że liczba wszystkich k – elementowych podzbiorów, które można wybrać ze zbioru $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ liczącego n elementów, jest równa $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Przypomnijmy, że przez $\binom{n}{k}$ umówiliśmy się oznaczać liczbę wszystkich możliwych k – elementowych podzbiorów zbioru A .

Dla dowodu zauważmy, że liczba wszystkich możliwych k – elementowych ciągów utworzonych z różnych elementów zbioru A jest z jednej strony równa

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ czynników}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

a z drugiej strony – jest równa

$$\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1}_{k \text{ czynników}} \cdot \binom{n}{k}$$

ponieważ w każdym z k – elementowych podzbiorów zbioru A możemy ustalić kolejność elementów na

$$k! = \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1}_{k \text{ czynników}}$$

sposobów.

Otrzymujemy więc równość

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$$

stąd

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Na podstawie spostrzeżenia poczynionego powyżej mamy twierdzenie.

Twierdzenie: liczba k – elementowych kombinacji zbioru n – elementowego

Liczba $\binom{n}{k}$ wszystkich k – elementowych kombinacji zbioru n – elementowego jest równa

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1}.$$

Przykład 3

Pokażemy kilka zastosowań twierdzenia o liczbie kombinacji.

1. Do turnieju koszykówki, rozgrywanego systemem „każdy z każdym” (bez rewanżów), zgłosiło się 12 drużyn.

Liczba wszystkich meczów do rozegrania w tym turnieju jest zatem równa $\binom{12}{2}$, czyli $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$.

2. Z pudełka, w którym znajduje się 20 kul ponumerowanych od 1 do 20, mamy wylosować 3 kule.

Każdy wynik takiego losowania to trzejelementowy podzbiór zbioru dwudziestoelementowego, zatem liczba sposobów, na które można to zrobić, jest równa $\binom{20}{3}$. Ta liczba jest więc równa $\frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$.

3. Na okręgu zaznaczono 11 różnych punktów. Obliczamy, ile jest wszystkich czworokątów wypukłych, których wierzchołkami są punkty wybrane spośród tych zaznaczonych. Ponieważ wybierając dowolne cztery z tych jedenastu punktów na dokładnie jeden

sposób, połączymy je tak, aby otrzymać kolejne boki czworokąta wypukłego, więc szukana liczba wszystkich czworokątów to $\binom{11}{4}$, co jest równe $\frac{11!}{4! \cdot 7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330$.

4. Spośród uczniów 37 – osobowej klasy należy wybrać 5 – osobową delegację.

Można to zrobić na $\binom{37}{5}$ sposobów, co jest równe $\frac{37!}{5! \cdot 32!} = \frac{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 435897$ (to prawie pół miliona sposobów).

5. W pewnej grze losowej należy wybrać 6 liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$. Liczba sposobów, na które można tego dokonać jest równa $\binom{49}{6}$, czyli

$$\frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816 \text{ (to liczba bliska 14 milionom).}$$

6. W rozdaniu brydżowym gracz otrzymuje 13 kart wybranych losowo z talii 52 kart. Liczba wszystkich układów kart możliwych do otrzymania przez brydżystę jest więc równa $\binom{52}{13}$, czyli $\frac{52!}{13! \cdot 39!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 635013559600$ (to ponad 635 miliardów układów).

Przykład 4

Rozpatrzmy równanie

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$$

gdzie każda z liczb $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ jest całkowita i nieujemna.

Wykażemy, że jest 3003 wszystkich rozwiązań tego równania.

Rozpatrzmy pomocniczo wszystkie wyniki piętnastokrotnego rzutu monetą, w których wypadło dokładnie 10 orłów. Oznaczmy przez:

x_1 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach do momentu, w którym wyrzucono pierwszą reszkę,

x_2 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono pierwszą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono drugą reszkę,

x_3 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono drugą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono trzecią reszkę,

x_4 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono trzecią reszkę, do momentu, w którym wyrzucono czwartą reszkę,

x_5 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono czwartą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono piątą reszkę,

x_6 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono piątą reszkę.

Wtedy:

- każdemu wynikowi takiego rzutu monetą odpowiada dokładnie jeden ciąg $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$,
- każdemu ciągowi $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ odpowiada jeden wynik piętnastokrotnego rzutu monetą, w którym wypadło dokładnie 10 orłów.

Ponieważ jest $\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3003$ wszystkich wyników piętnastokrotnego rzutu monetą, w których wypadło dokładnie 10 orłów, więc również tyle jest rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$ w nieujemnych liczbach całkowitych.

Rozumując podobnie, można też wykazać, że równanie $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = k$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą, a każda z liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ jest całkowita i nieujemna, ma dokładnie $\binom{n+k-1}{k}$ rozwiązań.

Współczynniki dwumianowe, wzór dwumianowy Newtona

Przykład 5

Wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x :

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

- sposób I (algebraiczny)

Zapisujemy równość

$$(x+1)^4 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1).$$

Po wymnożeniu wyrażeń zapisanych w nawiasach po prawej stronie tej równości i pogrupowaniu wyrazów podobnych otrzymamy wyrażenie (wielomian zmiennej x), w którym wystąpią jednomiany zmiennej x .

Czynność taką można wykonać, korzystając ze wzoru na sześćcian sumy:

$$(x+1)^4 = ((x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1)) \cdot (x+1) = (x+1)^3 \cdot (x+1) =$$

$$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \cdot (x+1) =$$

$$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \cdot x + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \cdot 1 =$$

$$= x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 =$$

$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \text{ lub ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy:}$$

$$(x+1)^4 = ((x+1)^2)^2 = (x^2 + 2x + 1)^2 = (x^2 + (2x+1))^2 =$$

$$= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (2x+1) + (2x+1)^2 =$$

$$= x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 4x + 1 =$$

$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

- sposób II (kombinatoryczny)

Zauważmy, że mnożąc wyrażenia wybierane z każdego z kolejnych nawiasów iloczynu

$(x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1)$, dostaniemy za każdym razem mnożenie czterech

czynników. Wynikiem każdego takiego mnożenia jest wyrażenie x^k , gdzie k jest równe 4, 3, 2, 1 lub 0. Wykonajmy więc wszystkie możliwe mnożenia wyrażeń wybieranych

z kolejnych nawiasów – możemy to zrobić na $2^4 = 16$ sposobów.

Rozróżniamy pięć przypadków:

1. ze wszystkich nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na jeden sposób, a w wyniku otrzymamy x^4 , co można też zapisać jako $\binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot 1^0$,
2. z dokładnie trzech nawiasów wybraliśmy x – wtedy z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy 1, a więc można to zrobić na 4 sposoby. Zatem łącznie otrzymamy $4x^3$, co można też zapisać jako $\binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot 1^1$,
3. z dokładnie dwóch nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ sposobów. Łącznie otrzymamy więc $6x^2$, co można też zapisać jako $\binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot 1^2$,
4. z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy x – można to zrobić na 4 sposoby. Łącznie otrzymamy więc $4x$, co można też zapisać jako $\binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot 1^3$,
5. z żadnego z nawiasów nie wybraliśmy x – można to zrobić na 1 sposób. Wtedy z każdego z nawiasów musimy wybrać jedynkę, więc w wyniku mnożenia otrzymamy 1, co można też zapisać jako $\binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot 1^4$.

Ostatecznie stwierdzamy, że

$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$. Otrzymaną tożsamość możemy też zapisać w postaci

$$(x + 1)^4 = \binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot 1^0 + \binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot 1^1 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot 1^3 + \binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot 1^4.$$

Przykład 6

Wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x :

$$(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

- sposób I (algebraiczny)

$$\begin{aligned}(x + 1)^5 &= (x + 1)^4 \cdot (x + 1) = (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \cdot (x + 1) = \\ &= x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = \\ &= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.\end{aligned}$$

- sposób II (kombinatoryczny)

Zauważmy, że mnożąc wyrażenia wybierane z każdego z kolejnych nawiasów iloczynu $(x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 1)$

dostaniemy za każdym razem do pomnożenia pięć czynników, przy czym każdy z nich to x albo 1. Zatem wynikiem każdego takiego mnożenia jest wyrażenie x^k , gdzie k jest równe 5, 4, 3, 2, 1 lub 0. Wykonajmy więc wszystkie możliwe mnożenia wyrażen wybieranych z kolejnych nawiasów – możemy to zrobić na $2^5 = 32$ sposoby.

Rozróżniamy sześć przypadków:

1. ze wszystkich nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na jeden sposób, a w wyniku otrzymamy x^5 , co można też zapisać jako $\binom{5}{5} \cdot x^5 \cdot 1^0$,
2. z dokładnie czterech nawiasów wybraliśmy x – wtedy z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy 1, a więc można to zrobić na 5 sposobów. Zatem łącznie otrzymamy $5x^4$, co można też zapisać jako $\binom{5}{4} \cdot x^4 \cdot 1^1$,
3. z dokładnie trzech nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$ sposobów. Łącznie otrzymamy więc $10x^3$, co można też zapisać jako $\binom{5}{3} \cdot x^3 \cdot 1^2$,
4. z dokładnie dwóch nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ sposobów. Łącznie otrzymamy więc $10x^2$, co można też zapisać jako $\binom{5}{2} \cdot x^2 \cdot 1^3$,
5. z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy x – można to zrobić na 5 sposobów. Łącznie otrzymamy więc $5x$, co można też zapisać jako $\binom{5}{1} \cdot x^1 \cdot 1^4$,
6. z żadnego z nawiasów nie wybraliśmy x – można to zrobić na 1 sposób. Wtedy z każdego z nawiasów musimy wybrać jedynkę, więc w wyniku mnożenia otrzymamy 1, co można też zapisać jako $\binom{5}{0} \cdot x^0 \cdot 1^5$.

Ostatecznie stwierdzamy, że

$$(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

Otrzymaną tożsamość możemy też zapisać w postaci

$$(x + 1)^5 = \binom{5}{5} \cdot x^5 \cdot 1^0 + \binom{5}{4} \cdot x^4 \cdot 1^1 + \binom{5}{3} \cdot x^3 \cdot 1^2 + \binom{5}{2} \cdot x^2 \cdot 1^3 + \binom{5}{1} \cdot x^1 \cdot 1^4 + \binom{5}{0} \cdot x^0 \cdot 1^5.$$

Przykład 7

Wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x :

$$(x + 1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$$

- sposób I

Najpierw pokazujemy, że

$$\begin{aligned} (x + 1)^6 &= (x + 1)^5 \cdot (x + 1) = (x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1) \cdot (x + 1) = \\ &= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} (x + 1)^7 &= (x + 1)^6 \cdot (x + 1) = (x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1) \cdot (x + 1) = \\ &= x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1. \end{aligned}$$

- sposób II

Korzystając z pomysłów przedstawionych w sposobie II rozwiązania poprzednich podpunktów, pokazujemy, że

$$(x+1)^7 = \binom{7}{7}x^7 \cdot 1^0 + \binom{7}{6} \cdot x^6 \cdot 1^1 + \binom{7}{5} \cdot x^5 \cdot 1^2 + \binom{7}{4} \cdot x^4 \cdot 1^3 + \binom{7}{3} \cdot x^3 \cdot 1^4 + \binom{7}{2} \cdot x^2 \cdot 1^5 + \binom{7}{1} \cdot x^1 \cdot 1^6 + \binom{7}{0} \cdot x^0 \cdot 1^7.$$

Ponieważ $\binom{7}{7} = \binom{7}{0} = 1$, $\binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7$, $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$,

$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$, więc otrzymujemy

$$(x+1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1.$$

Rozumując podobnie jak w sposobie II rozwiązań przedstawionych w powyższym przykładzie, można pokazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n oraz dowolnych liczb całkowitych a oraz b prawdziwa jest równość

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Wzór ten jest nazywany wzorem dwumianowym Newtona.

W szczególności dla $a = b = 1$ otrzymujemy

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Otrzymana równość uzasadnia znany nam już fakt, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego jest równa 2^n .