Wykres funkcji określonej różnymi wzorami w różnych przedziałach

Wykres funkcji określonej różnymi wzorami w różnych przedziałach

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Jednym ze sposobów opisywania funkcji jest opis za pomocą wzoru. Czy funkcję można opisać za pomocą tylko jednego wzoru? Czy można opisywać funkcję różnymi wzorami w różnych zbiorach? Odpowiedzi na te pytania uzyskasz analizując poniższy materiał.

Znanym przykładem funkcji opisanej za pomocą wzoru zapisanego różnymi wyrażeniami jest tzw. funkcja Dirichleta. Jest to funkcja zmiennej rzeczywistej, która przyjmuje wartość 1, gdy argument jest liczbą wymierną i wartość 0, gdy argument nie jest liczbą wymierną. Innym przykładem tego typu funkcji jest funkcja wartość bezwzględna liczby x. Wartość tej funkcji jest równa liczbie x, gdy liczba x jest liczbą nieujemną. Jeżeli liczba x jest liczbą ujemną, to wartość funkcji jest równa liczbie przeciwnej do liczby x.

Twoje cele

- Opiszesz funkcję określoną różnymi wzorami w różnych przedziałach.
- Sporządzisz wykres funkcji określonej różnymi wzorami w różnych przedziałach.
- Odczytasz z wykresu funkcji, opisanej różnymi wzorami w różnych przedziałach, zbiór wartości funkcji.

Przeczytaj

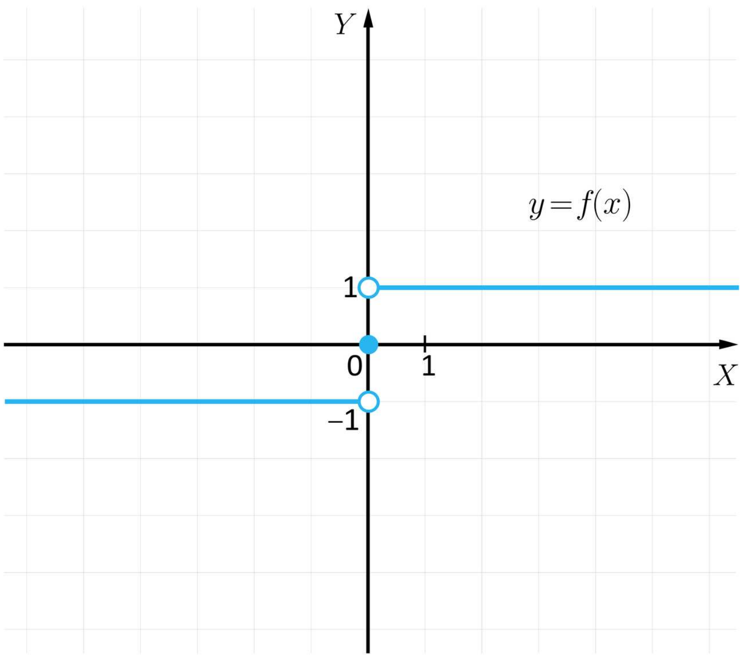
Funkcje liczbowe można opisywać wzorem zapisanym za pomocą kilku wyrażeń w różnych przedziałach. W jaki sposób należy rysować wtedy wykres tak opisanej funkcji? Odpowiedź na to pytanie uzyskamy po przeanalizowaniu poniższych przykładów.

Przykład 1

Naszkicujmy wykres funkcji f określonej w zbiorze liczb rzeczywistych.

Funkcja ta ma swoją nazwę. Jest to funkcja signum, sgn (łac. signum „znak”).

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x > 0 \\ 0, & \text{dla } x = 0 \\ -1, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$



Przykład 2

Naszkicujemy wykres funkcji f.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{dla } x \in (-\infty,\ 1) \\ 3, & \text{dla } x \in \langle 1,\ 3\rangle \\ -x+6, & \text{dla } x \in (3,\ \infty) \end{cases}$$

Odczytamy z rysunku współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru wyrażonego trzema wyrażeniami. W celu narysowania wykresu wykonamy odpowiednie tabelki częściowe.

Pierwszą tabelkę częściową wykonamy dla funkcji opisanej pierwszym wyrażeniem i dla kilku argumentów należących do pierwszego przedziału.

Argumenty i wartości funkcji				
x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-1	0	1	2

$f(-3) = -3 + 2 = -1$

$f(-2) = -2 + 2 = 0$

$f(-1) = -1 + 2 = 1$

$f(0) = 0 + 2 = 2$

Druga część wykresu nie wymaga tabelki. Dla każdego argumentu x, takiego, że $x \in \langle 1,\ 3 \rangle$ funkcja ma stałą wartość równą trzy.

Dla argumentów należących do trzeciego przedziału wykonamy tabelkę częściową.

Argumenty i wartości funkcji				
x	4	5	6	7
$f(x)$	2	1	0	-1

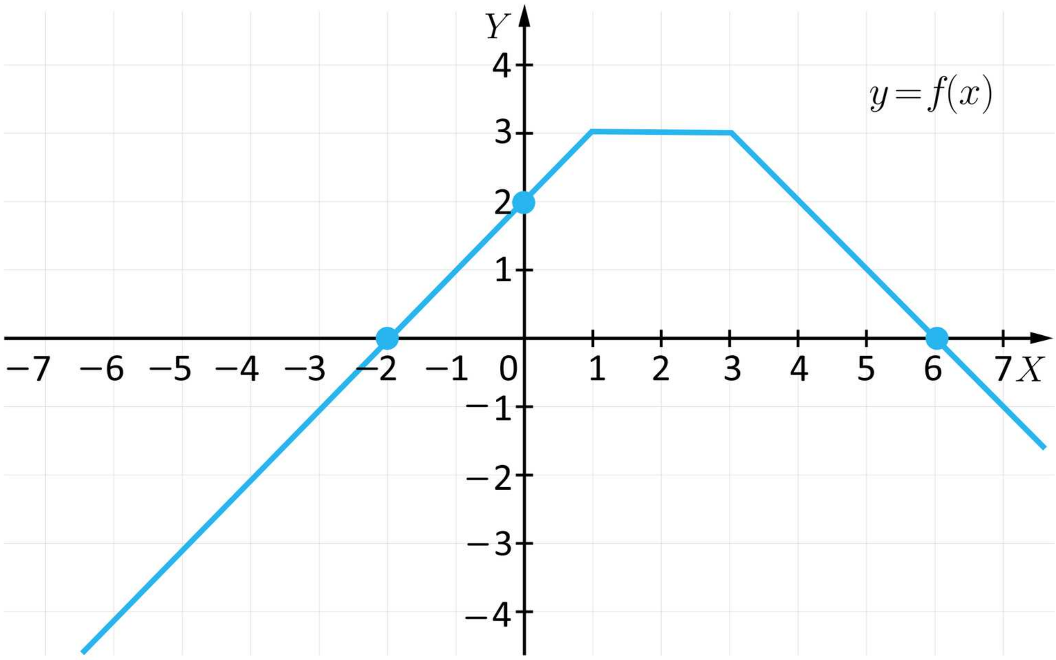
$f(4) = -4 + 6 = 2$

$f(5) = -5 + 6 = 1$

$f(6) = -6 + 6 = 0$

$f(7) = -7 + 6 = -1$

Na podstawie wyznaczonych współrzędnych, szkicujemy wykres funkcji.



Korzystając z wykresu odczytujemy współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.

Wykres funkcji ma dwa punkty wspólne z osią X – są to punkty o współrzędnych $(-2,\ 0)$ i $(6,\ 0)$.

Z osią Y wykres funkcji ma jeden punkt wspólny o współrzędnych $(0,\ 2)$.

Przykład 3

Naszkicujemy wykres funkcji f.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dla } x \in (-\infty,\ -2) \\ (x+1)^2, & \text{dla } x \in \{-2,\ -1,\ 0\} \\ -x+3, & \text{dla } x \in (0,\ \infty) \end{cases}$$

Odczytamy z wykresu współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.

Czy wykres funkcji jest linią ciągłą?

Rozwiązanie:

Funkcja f opisana jest wzorem zapisanym za pomocą trzech wyrażeń. W celu narysowania wykresu funkcji wykonamy dwie tabelki częściowe.

Pierwszą tabelkę wykonamy dla funkcji opisanej pierwszym wzorem i argumentów należących do pierwszego przedziału.

Argumenty i wartości funkcji

Argumenty i wartości funkcji			
x	-4	$-3\frac{1}{2}$	-3
$f(x)$	-4	$-3\frac{1}{2}$	-3

Funkcja opisana drugim wzorem jest określona dla trzech argumentów.

Argumenty i wartości funkcji			
x	-2	-1	0
$f(x)$	1	0	1

$f(-2) = (-2+1)^2 = (-1)^2 = 1$

$f(-1) = (-1+1)^2 = 0$

$f(0) = (0+1)^2 = 1$

Dla argumentów należących do przedziału trzeciego wykonujemy tabelkę częściową.

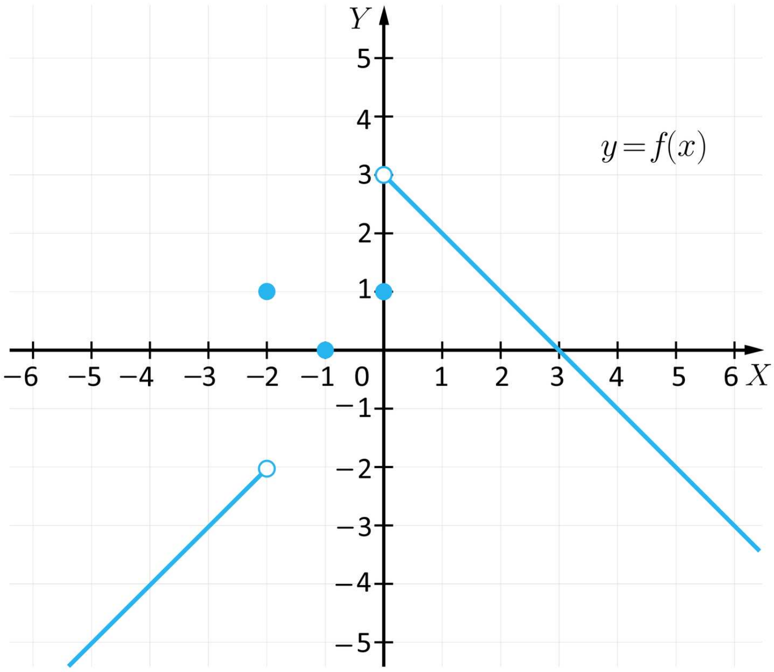
Argumenty i wartości funkcji				
x	$\frac{1}{2}$	2	$3\frac{1}{2}$	4
$f(x)$	$2\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 3 = 2\frac{1}{2}$

$f(2) = -2 + 3 = 1$

$f\left(3\frac{1}{2}\right) = -3\frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{2}$

$f(4) = -4 + 3 = -1$



Wykres funkcji ma jeden punkt wspólny z osią Y. Jest to punkt o współrzędnych $(0,\ 1)$.

Z osią X wykres ma dwa punkty wspólne. Są nimi punkty o współrzędnych: $(-1,\ 0)$ i $(3,\ 0)$.

Wykres funkcji nie jest linią ciągłą.

Ważne!

W matematyce niekiedy posługujemy się funkcjami zmiennej x, których wzór składa się z kilku wyrażeń połączonych klamrą. Aby naszkicować wykres tak opisanej funkcji należy naszkicować wykres funkcji dla każdej części wzoru, uwzględniając przedział liczbowy, do którego dana część wzoru jest przypisana. Wykresy szkicujemy w tym samym układzie współrzędnych.

Słownik

funkcja liczbowa

funkcja, której dziedzina i zbiór wartości to zbiory liczbowe

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w animacji. Spróbuj samodzielnie wykonać polecenia, a następnie porównaj uzyskane wyniki z rozwiązaniami pokazanymi w animacji.

W dwóch przykładach zaprezentowanych w animacji wykorzystywany jest wykres funkcji kwadratowej. Aby wykonać taki wykres (czyli parabolę), można posłużyć się tabelką lub skorzystać z własności paraboli.

Ramiona paraboli są skierowane do góry, gdy współczynnik liczbowy, występujący przy najwyższej potędze zmiennej we wzorze funkcji kwadratowej, jest liczbą dodatnią.

Ramiona paraboli są skierowane w dół, gdy współczynnik liczbowy, występujący przy najwyższej potędze zmiennej, jest liczbą ujemną. Współrzędne wierzchołka paraboli wyznaczyć można w sposób następujący: pierwsza współrzędna wierzchołka jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych odpowiedniej funkcji kwadratowej, a druga współrzędna to odpowiadająca jej wartość tej funkcji.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dp9oKlrsY

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący wykresu funkcji sklejanej.

Po przeanalizowaniu materiału przedstawionego w animacji wykonaj poniższe polecenia.

Polecenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu funkcji współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4, & \text{dla } x \in (-\infty,\ 0\rangle \\ \frac{1}{x}, & \text{dla } x \in (0,\ \infty) \end{cases}$$

Polecenie 3

Sprawdź, czy wykres funkcji f jest linią ciągłą.

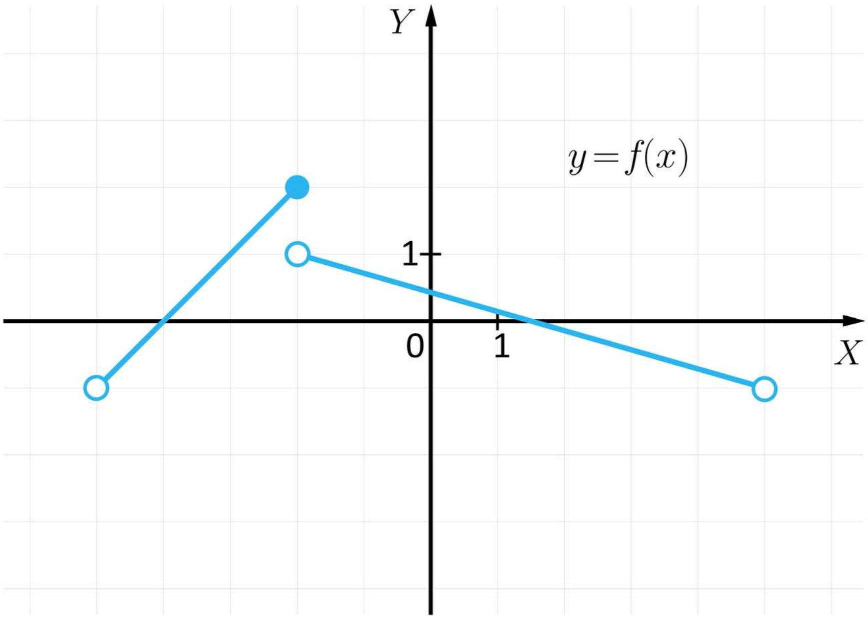
$$f(x)=\begin{cases} \frac{4x}{3}+\frac{10}{3}, & \text{dla } x\in(-\infty,\ -1) \\ 2x^2, & \text{dla } x\in\langle -1,\ 1\rangle \\ \frac{x}{2}+\frac{3}{2}, & \text{dla } x\in(1,\ \infty) \end{cases}$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Funkcja f opisana jest za pomocą poniższego wykresu.



Ćwiczenie 2

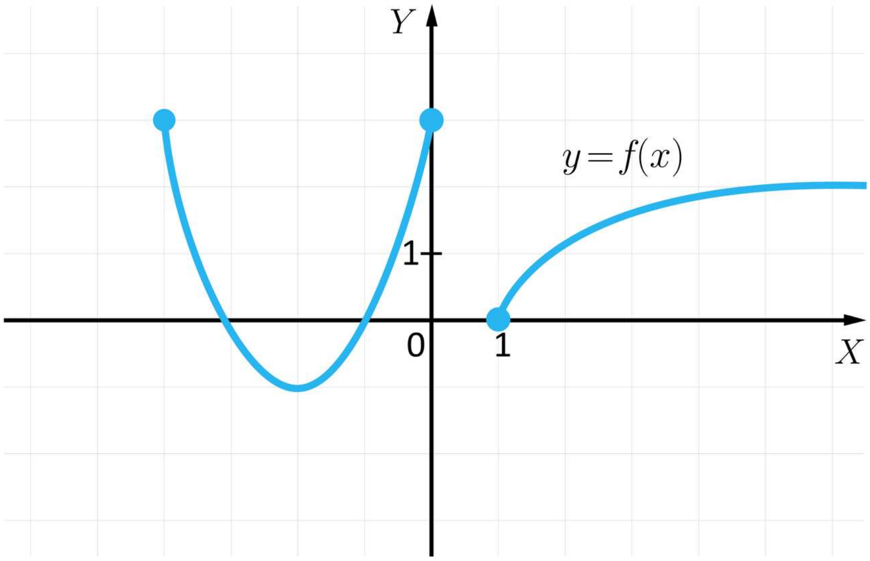
Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

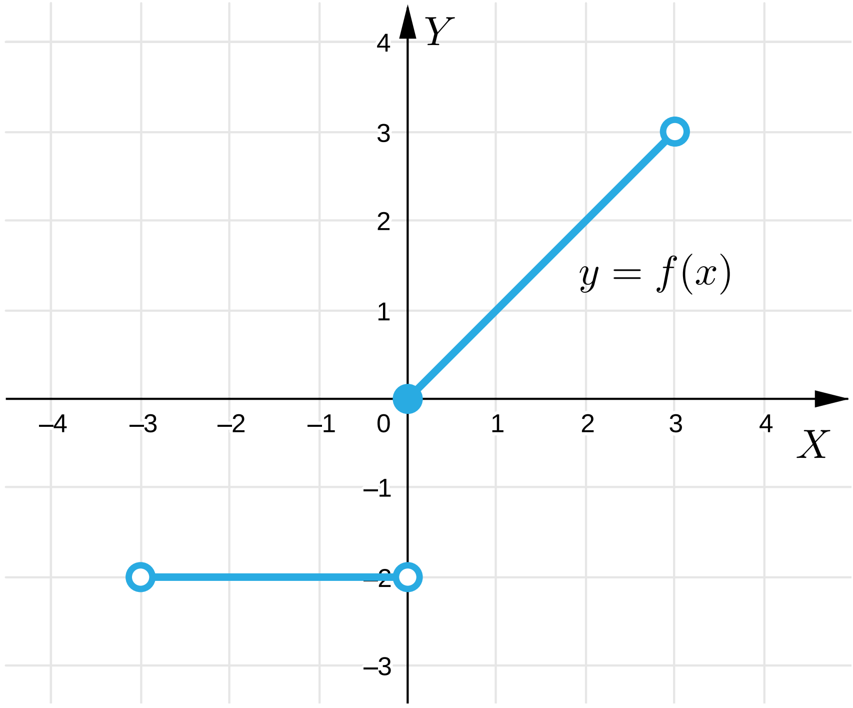
Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Rysunek przedstawia wykres funkcji f.

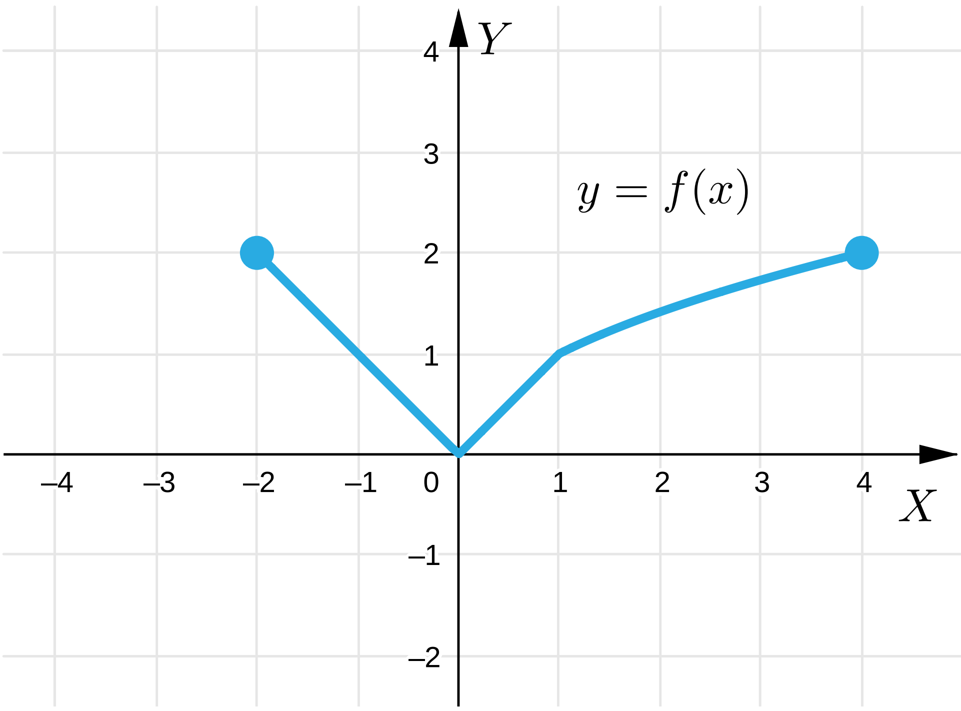


Wskaż wzór, jakim jest określona funkcja f.

- $f(x) = "\{" \begin{matrix} -2, & \text{jeśli } x \in (-3, 0) \\ x, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 3) \end{matrix} """"$
- $f(x) = "\{" \begin{matrix} -2, & \text{jeśli } x \in (-3, 0\rangle \\ x, & \text{jeśli } x \in (0, 3) \end{matrix} """"$
- $f(x) = "\{" \begin{matrix} -2, & \text{jeśli } x \in (-2, 0) \\ x, & \text{jeśli } x \in (0, 3) \end{matrix} """"$
- $f(x) = "\{" \begin{matrix} -2, & \text{jeśli } x \in (-3, 0) \\ 2x, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 3) \end{matrix} """"$

Ćwiczenie 9

Rysunek przedstawia wykres funkcji f.

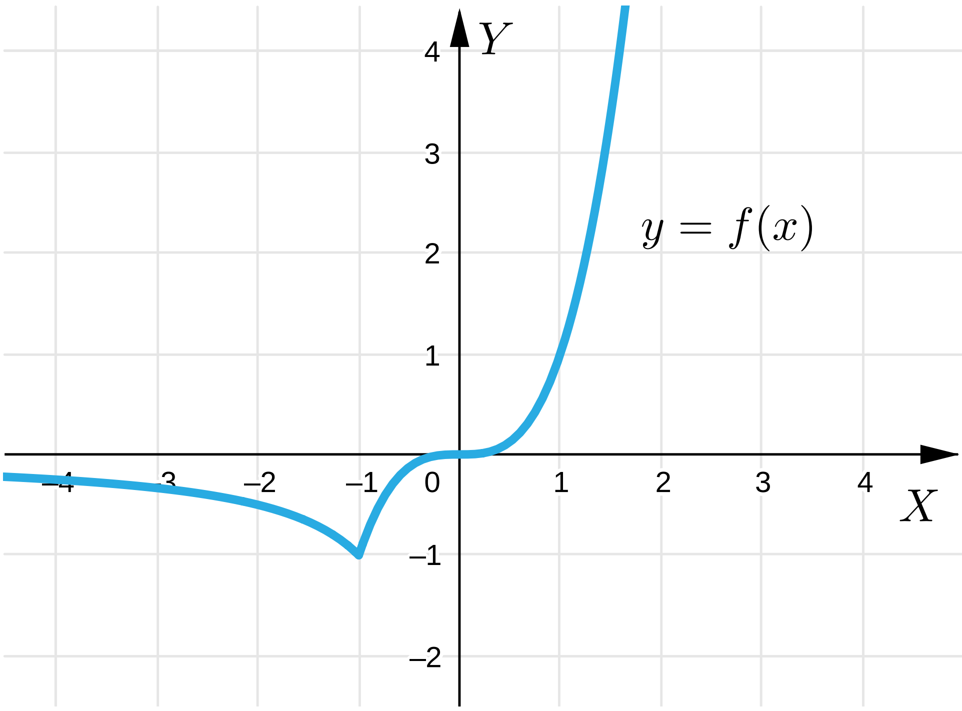


Wskaż wzór, jakim jest określona funkcja f.

- $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{jeśli } x \in \langle -2, 1) \\ \sqrt{x}, & \text{jeśli } x \in \langle 1, 4\rangle \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{jeśli } x \in \langle -2, 1) \\ x^2, & \text{jeśli } x \in \langle 1, 4\rangle \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{jeśli } x \in \langle -2, 0) \\ \sqrt{x}, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 4\rangle \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{jeśli } x \in \langle -2, 0) \\ \sqrt{x}, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 4\rangle \end{cases}$

Ćwiczenie 10

Rysunek przedstawia wykres funkcji f.

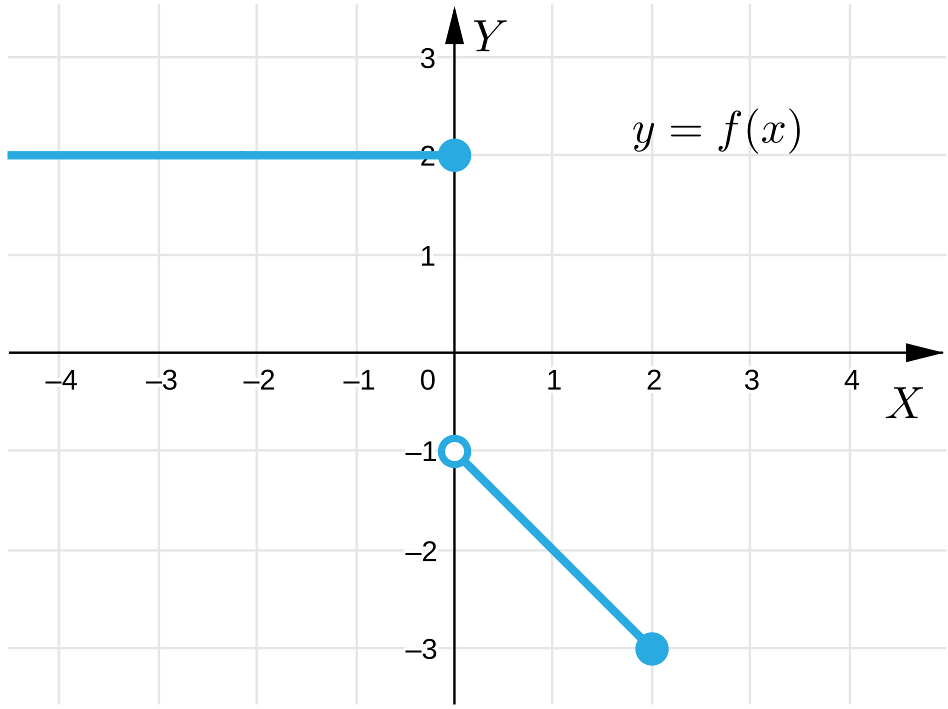


Wskaż wzór, jakim jest określona funkcja f.

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1\rangle \\ x^3, & \text{jeśli } x \in (-1, +\infty) \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1\rangle \\ x^2, & \text{jeśli } x \in (-1, +\infty) \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1\rangle \\ x^3, & \text{jeśli } x \in (-1, +\infty) \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{5}x - \frac{6}{5}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1\rangle \\ x^3, & \text{jeśli } x \in (-1, +\infty) \end{cases}$

Ćwiczenie 11

Rysunek przedstawia wykres funkcji f.



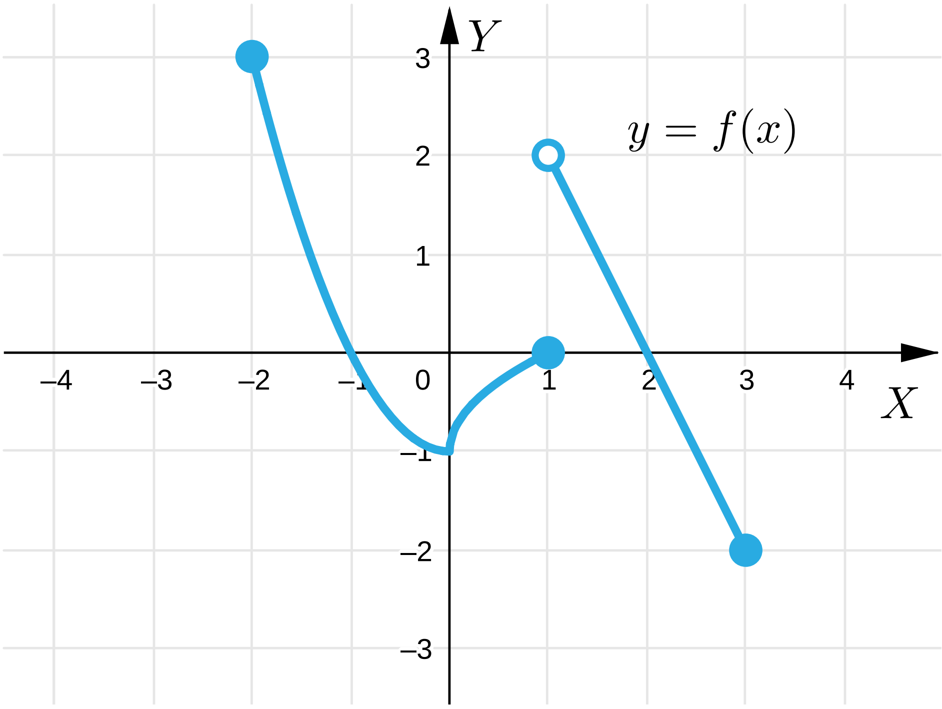
Na podstawie rysunku odczytaj:

$(0, -1)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, 3, 1, 2, -3

Punkt wspólny wykresu funkcji f z osią Y .... oraz $f(2) =$ ....

Ćwiczenie 12

Rysunek przedstawia wykres funkcji f.



Na podstawie rysunku odczytaj:

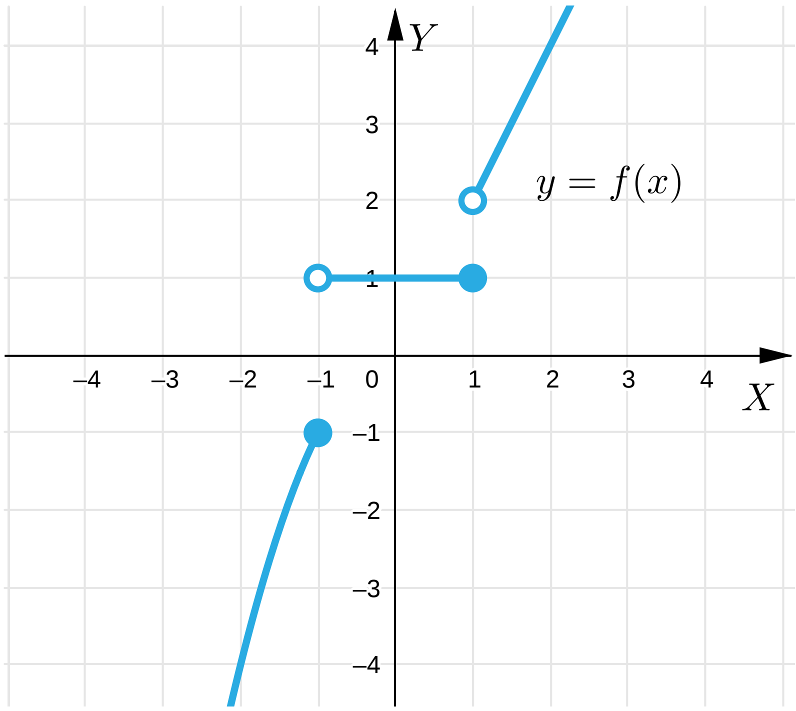
$(-1, 0)$, -1, 2, -3, -2, 0, $(0, -1)$, $(0, 1)$

Punkt wspólny wykresu funkcji f z osią Y ....,

$f(1) =$ ...., $f(3) =$ ....

Ćwiczenie 13

Rysunek przedstawia wykres funkcji f.



Ćwiczenie 14

Ćwiczenie 15

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres funkcji określonej różnymi wzorami w różnych przedziałach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rysuje wykresy funkcji określonych różnymi wzorami w różnych przedziałach
- odczytuje z wykresu funkcji współrzędne punktów wspólnych wykresu z osiami układu współrzędnych
- wyznacza dziedzinę funkcji korzystając ze wzoru lub z wykresu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- mapy myśli

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Przed lekcją nauczyciel prosi uczniów, aby przypomnieli sobie poznane dotychczas wiadomości dotyczące funkcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.
2. Uczniowie, podzieleni na grupy, tworzą mapy myśli zawierające poznane dotychczas wiadomości dotyczące funkcji.
3. Wykonane schematy umieszczają w widocznym miejscu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, pracując w parach, analizują materiał przedstawiony w sekcji „Przeczytaj".
2. Po upływie wyznaczonego czasu tworzą większe grupy, wspólnie uzgadniają wnioski i odpowiadają na pytania zadane w sekcji „Przeczytaj".
3. Porównują swoje spostrzeżenia z pozostałymi uczniami.
4. Wspólne wnioski przedstawiają na forum klasy.
5. Uczniowie oglądają animację i najpierw samodzielnie wykonują dane wykresy, a następnie porównują z prezentowanymi rozwiązaniami.
6. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności takie, jak stosowanie wykresów do opisu funkcji.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wyjaśnia wszelkie wątpliwości oraz ocenia pracę uczniów w czasie zajęć.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.
2. Praca domowa dla chętnych:
   Odszukaj, w dostępnych źródłach, wykresy, którymi posługujemy się w życiu codziennym.

Materiały pomocnicze:

Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać do pracy metodą odwróconej klasy.

Uczniowie mogą obejrzeć animację w domu i na jej podstawie przygotować krótkie wprowadzenie do lekcji.