Działania na pierwiastkach

Definicja pierwiastka dowolnego stopnia. Twierdzenia o działaniach na pierwiastkach.

Działania na pierwiastkach

W tym materiale poznasz pojęcia i twierdzenia związane z pierwiastkami.

- Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b taką, która podniesiona do drugiej potęgi jest równa a.
  Zatem, dla dowolnej liczby nieujemnej a: $\sqrt{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a$ i $b \geq 0$
  .

- Pierwiastkiem sześciennym z liczby a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a.
  Zatem, dla dowolnej liczby a: $\sqrt[3]{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b^3 = a$.

Zauważmy, że powyższe definicje różnią się założeniami dla liczb a i b. Ponieważ b^2 jest zawsze liczbą nieujemną, to pierwiastki kwadratowe obliczamy wyłącznie z liczb nieujemnych. Natomiast b^3 może być zarówno ujemne, jak i nieujemne, dlatego pierwiastek sześcienny obliczamy z dowolnej liczby a.
Podobnie możemy zapisać definicje pierwiastka stopnia n większego niż 1, pamiętając o odpowiednim założeniu dotyczącym liczby podpierwiastkowej.

- Jeśli n jest liczbą parzystą większą od 1, to pierwiastkiem stopnia n z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b taką, która podniesiona do potęgi n jest równa a.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- Jeśli n jest liczbą nieparzystą większą od 1 to pierwiastkiem stopnia n z liczby a nazywamy liczbę b taką, która podniesiona do potęgi n jest równa a.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Twierdzenie: Działania na pierwiastkach

Jeśli a i b są liczbami nieujemnymi, n i m są liczbami naturalnymi większymi od 1, k jest dodatnią liczbą naturalną, to:

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Jeśli w powyższym twierdzeniu liczby n i m (stopnie pierwiastków) są nieparzyste, to twierdzenie pozostanie prawdziwe również dla ujemnych liczb podpierwiastkowych (a lub b).