



Nierówność wymierna podwójna

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zarówno równania, jak i nierówności należą do jednego z najstarszych, znanych już w starożytności, działów matematyki: algebry.

Wkład w rozwój pojęć z zakresu algebry, oprócz starożytnych Sumerów i Greków, mają także cywilizacje wschodnie: chińska oraz indyjska. Jednak za ojca współczesnej algebry uważa się, żyjącego w latach 1540 – 1603 francuskiego prawnika Francois Viète'a, któremu zawdzięczamy między innymi wprowadzenie symboli nie tylko dla niewiadomych, ale także dla danych oraz ujednolicenie ogólnych metod rozwiązywania równań. Tak, tak, to nie pomyłka – Francois Viète był z wykształcenia prawnikiem! Przez znaczną część życia wykonywał zawód adwokata, radcy sądowego, parlamentarzysty i radcy króla Francji Henryka IV. Czy wiesz, że pełniąc tę ostatnią funkcję, rozszyfrował tajne wiadomości króla Hiszpanii Filipa II? Dzięki temu strona francuska poznała wszystkie planowane przez przeciwnika strategie i zamierzenia. Hiszpański władca dowiedziawszy się o tym wniósł skargę do papieża o używanie czarnej magii przeciw niemu! Viète swoją matematyczną pasję rozwijał do końca życia, a jej owoce utrzymywał w licznych pracach także z zakresu astronomii, trygonometrii i geometrii. Swoje prace wydawał często na własny koszt i rozsyłał do wielu uczelni europejskich. Nie wszystkie jednak zostały opublikowane za jego życia lub wkrótce po śmierci – część dzieł Viète'a ukazała się 40 lat po jego śmierci pod wspólnym tytułem Opera Mathematica.

W tym materiale zapoznasz się z przykładami i sposobem postępowania w przypadku nierówności wymiernych podwójnych, które nazywać można także układami nierówności.

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówności wymierne.
- Rozwiążesz nierówność wymierną podwójną.
- Wykorzystasz wartość bezwzględną, rozkład wielomianu na czynniki liniowe, działania na przedziałach liczbowych, sporządzanie i przekształcenie wykresu funkcji homograficznej, czytanie wykresu funkcji, rozwiązując nierówności wymierne.
- Wykorzystasz w zadaniach związek między reprezentacją algebraiczną i graficzną nierówności.

Przeczytaj

Definicja: nierówność wymierna podwójna

Nierównością wymierną podwójną nazywamy taką nierówność, w zapisie której występują dwa symbole mniejszości/większości, jak w przykładzie:

$W_1(x) < W(x) < W_2(x)$, gdzie wyrażenie środkowe $W(x)$ lub wyrażenia skrajne $W_1(x)$ oraz $W_2(x)$ są wyrażeniami wymiernymi. W szczególności wszystkie występujące w tym zapisie wyrażenia mogą być wyrażeniami wymiernymi. Oczywiście nierówność taka może zawierać jeden lub oba „nieostre” symbole nierówności, tzn. $\leq$.

Własności wartości bezwzględnej

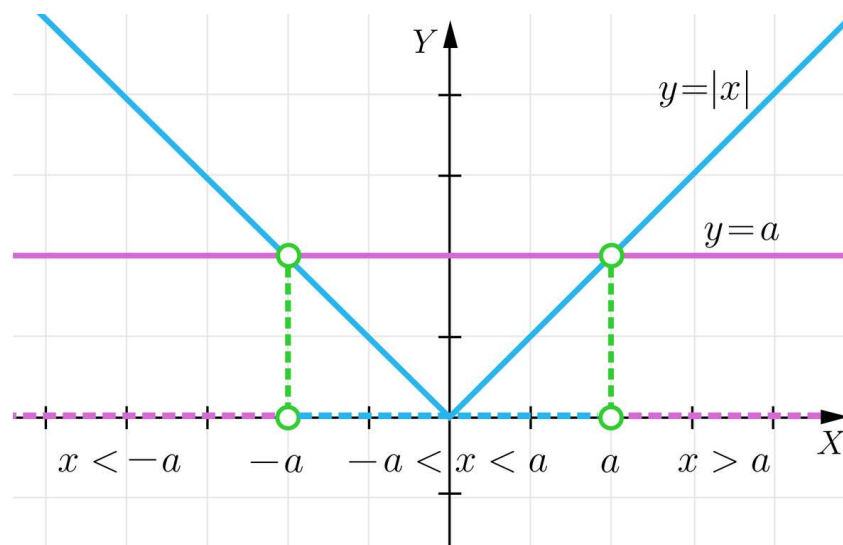
Dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$ prawdziwe są nierówności:

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow [(x < -a) \vee (x > a)]$

Powyższe nierówności można zapisać za pomocą przedziałów liczbowych:

- $|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a; a)$
- $|x| > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a; \infty)$

Nierówności te można także przedstawić graficznie.



Przykład 1

Rozwiążemy nierówność podwójną: $-2 \leq \frac{2x-2}{x+1} \leq 1$.

Rozwiązanie

Kolejne kroki rozwiązania

Określamy dziedzinę nierówności: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Nierówność podwójną zapisujemy w postaci koniunkcji dwóch nierówności:

$$-2 \leq \frac{2x-2}{x+1}$$

 $\wedge$

$$\frac{2x-2}{x+1} \leq 1$$

Rozwiązujemy każdą z nierówności niezależnie. Mówimy, że rozwiązujemy układ nierówności.

$$-2 \leq \frac{2x-2}{x+1}$$

 $\wedge$

$$\frac{2x-2}{x+1} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{2x-2}{x+1} + 2$$

 $\wedge$

$$\frac{2x-2}{x+1} - 1 \leq 0$$

$$\frac{2x-2}{x+1} + \frac{2(x+1)}{x+1} \geq 0$$

 $\wedge$

$$\frac{2x-2}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{2x-2+2x+2}{x+1} \geq 0$$

 $\wedge$

$$\frac{2x-2-x-1}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{4x}{x+1} \geq 0$$

 $\wedge$

$$\frac{x-3}{x+1} \leq 0$$

$$4x(x+1) \geq 0$$

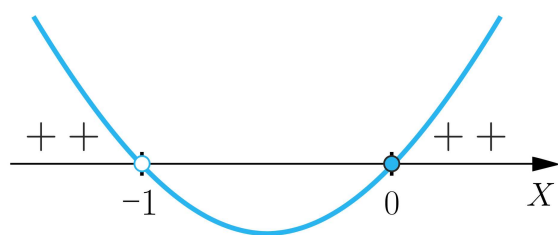
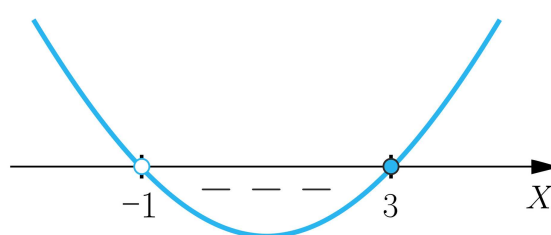
 $\wedge$

$$(x-3)(x+1) \leq 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1$$

 $\wedge$

$$x_1 = 3, x_2 = -1$$

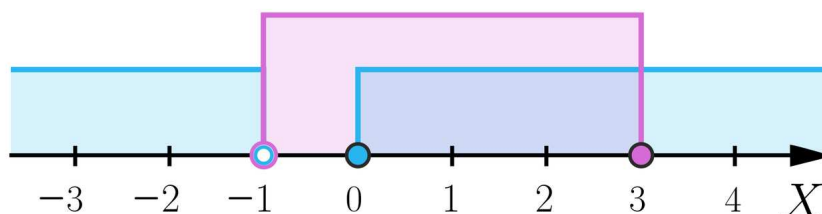

 $\wedge$


$$x \in (-\infty, -1) \cup \langle 0, \infty)$$

 $\wedge$

$$x \in (-1, 3]$$

Koniunkcja dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania są zdaniami prawdziwymi. Użycie spójnika logicznego i ($\wedge$) między dwiema nierównościami oznacza więc konieczność spełnienia obydwu nierówności jednocześnie. Zatem nierówność podwójna ma rozwiązanie będące iloczynem (częścią wspólną) rozwiązań nierówności składowych, tzn.



Odpowiedź: $x \in \langle 0, 3 \rangle$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność podwójną: $\frac{x}{x-1} < x < \frac{x}{x+1}$.

Rozwiązanie

Kolejne kroki rozwiązania

Określamy dziedzinę nierówności: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Nierówność podwójną zapisujemy w postaci koniunkcji dwóch nierówności i rozwiązujemy układ nierówności:

$$\frac{x}{x-1} < x / \cdot (x-1)^2$$

 $\wedge$

$$x < \frac{x}{x+1} / \cdot (x+1)^2$$

Rozwiązujemy układ nierówności:

$$x(x-1) < x(x-1)^2$$

 $\wedge$

$$x(x+1)^2 < x(x+1)$$

$$x(x-1) - x(x-1)^2 < 0$$

 $\wedge$

$$x(x+1)^2 - x(x+1) < 0$$

$$x(x-1)(1-x+1) < 0$$

 $\wedge$

$$x(x+1)(x+1-1) < 0$$

$$x(x-1)(2-x) < 0$$

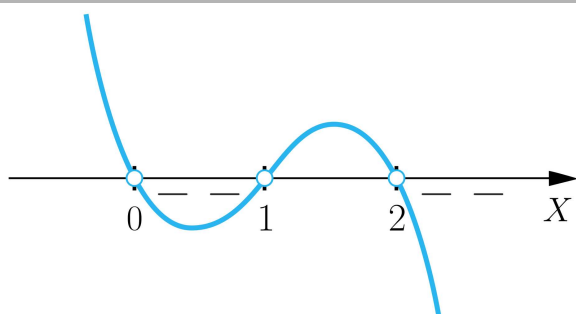
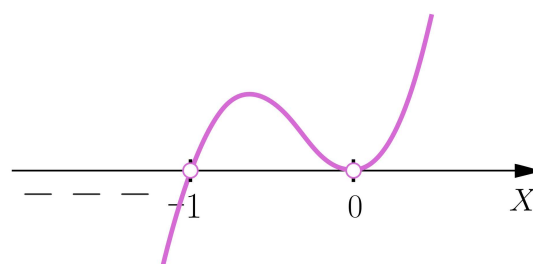
 $\wedge$

$$x^2(x+1) < 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$$

 $\wedge$

$$x_1 = 0, x_2 = -1$$

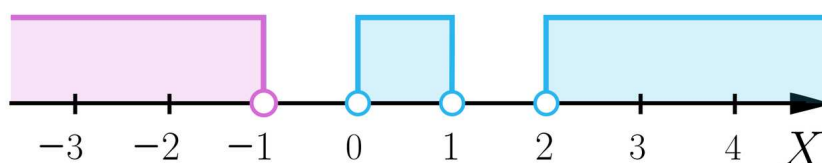

 $\wedge$


$$x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$$

 $\wedge$

$$x \in (-\infty, -1)$$

Wskazujemy iloczyn rozwiązań dwóch nierówności:



Odpowiedź: $x \in \{\emptyset\}$ – nierówność jest sprzeczna.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność: $\left| \frac{x}{x^2-1} \right| \leq 2$.

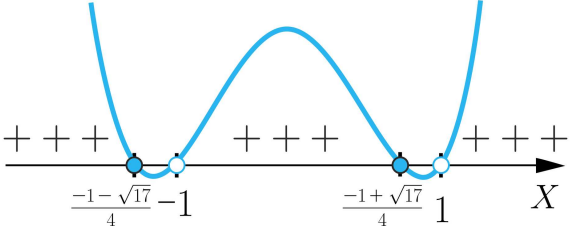
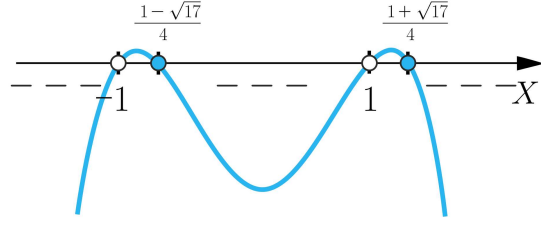
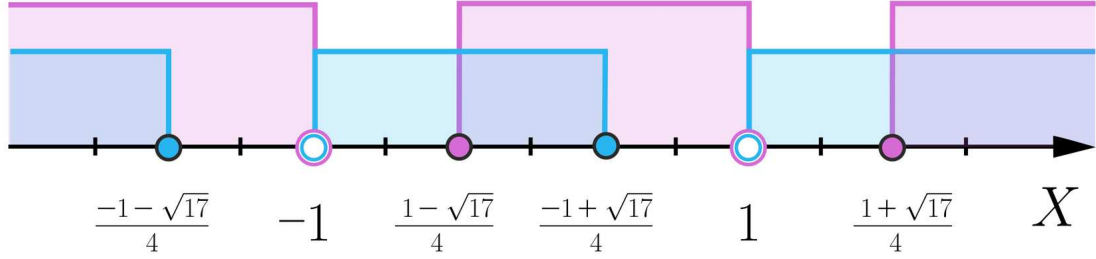
Rozwiązanie

Z własności wartości bezwzględnej wiemy, że wyjściowa nierówność jest równoważna nierówności podwójnej: $-2 \leq \frac{x}{x^2-1} \leq 2$.

Kolejne kroki rozwiązania

Określamy dziedzinę nierówności: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Nierówność podwójną zapisujemy w postaci koniunkcji dwóch nierówności i rozwiązujemy układ nierówności:

$-2 \leq \frac{x}{x^2-1}$	$\wedge$	$\frac{x}{x^2-1} \leq 2$
$\frac{x}{x^2-1} + 2 \geq 0$	$\wedge$	$\frac{x}{x^2-1} - 2 \leq 0$
$\frac{x}{x^2-1} + \frac{2(x^2-1)}{x^2-1} \geq 0$	$\wedge$	$\frac{x}{x^2-1} - \frac{2(x^2-1)}{x^2-1} \leq 0$
$\frac{x+2x^2-2}{x^2-1} \geq 0$	$\wedge$	$\frac{x-2x^2+2}{x^2-1} \leq 0$
$\frac{2x^2+x-2}{x^2-1} \geq 0$	$\wedge$	$\frac{-2x^2+x+2}{x^2-1} \leq 0$
$(2x^2+x-2)(x^2-1) \geq 0$	$\wedge$	$(-2x^2+x+2)(x^2-1) \leq 0$
$\Delta = 1 + 16 = 17$ $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $x_3 = -1, x_4 = 1$	$\wedge$	$\Delta = 1 + 16 = 17$ $x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$ $x_3 = -1, x_4 = 1$
	$\wedge$	
$x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(-1, \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup (1, \infty)$	$\wedge$	$x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, 1\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \infty\right)$
		
Uwaga: To zadanie wymaga szczególnej uwagi w zakresie szacowania miejsc zerowych będących liczbami niewymiernymi.		
Odpowiedź: $x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \infty\right)$.		

Słownik

koniunkcja

to zdanie złożone z dwóch zdań połączonych spójnikiem logicznym *i*. Spójnik logiczny *i* w matematyce oznacza się symbolem $\wedge$. Koniunkcję zdań p i q zapisujemy tak: $p \wedge q$

iloczyn dwóch zbiorów

to zbiór elementów należących jednocześnie do obu zbiorów

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

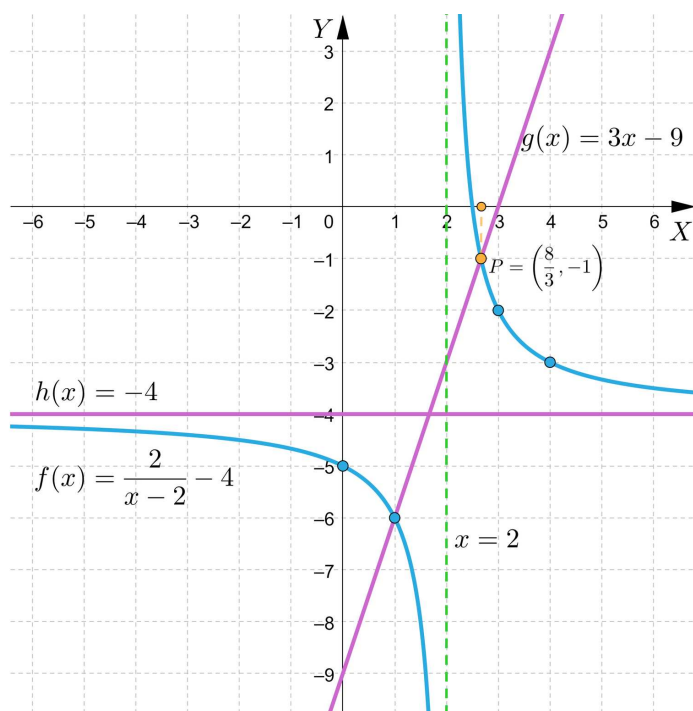
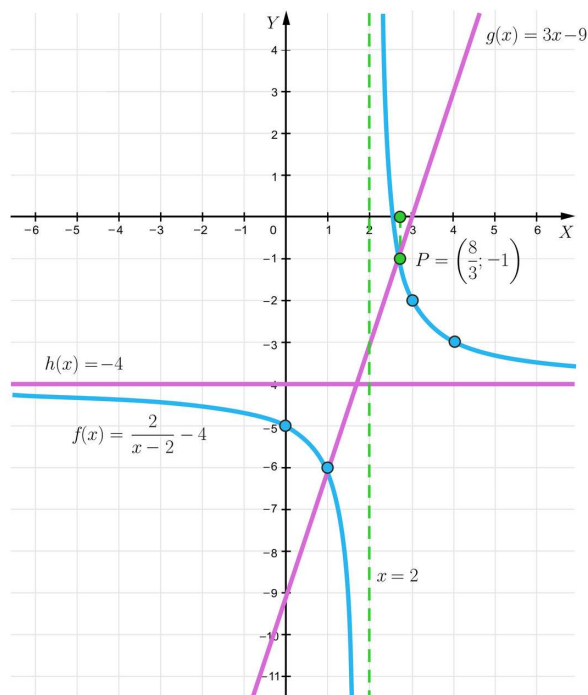
Zapoznaj się uważnie galerię zdjęć interaktywnych. Pokazuje ona krok po kroku graficzny sposób rozwiązania podwójnej nierówności wymiernej. Warto zapamiętać, że niektóre zadania znacznie łatwiej rozwiązać graficznie, niż algebraicznie.



Polecenie 2

Rysunek przedstawia wykresy trzech funkcji: $f(x) = \frac{2}{x-2} - 4$, $g(x) = 3x - 9$ oraz $h(x) = -4$.

Na jego podstawie zapisz co najmniej dwie (inne niż w Poleceniu 1) nierówności oraz odczytaj ich rozwiązania z załączonego wykresu.



Polecenie 3

Rozwiąż graficznie nierówność podwójną $-2 \leq \frac{2x-2}{x+1} \leq 1$.

Polecenie 4

Rozwiąż graficznie nierówność $\frac{2}{x-1} < |x - 2|$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Dziedziną podwójnej nierówności wymiernej

$$\frac{x-2}{x+4} \leq 0 \leq \frac{x-3}{x^2-4}$$
 jest zbiór:

☐ $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4, 2, 3\}$

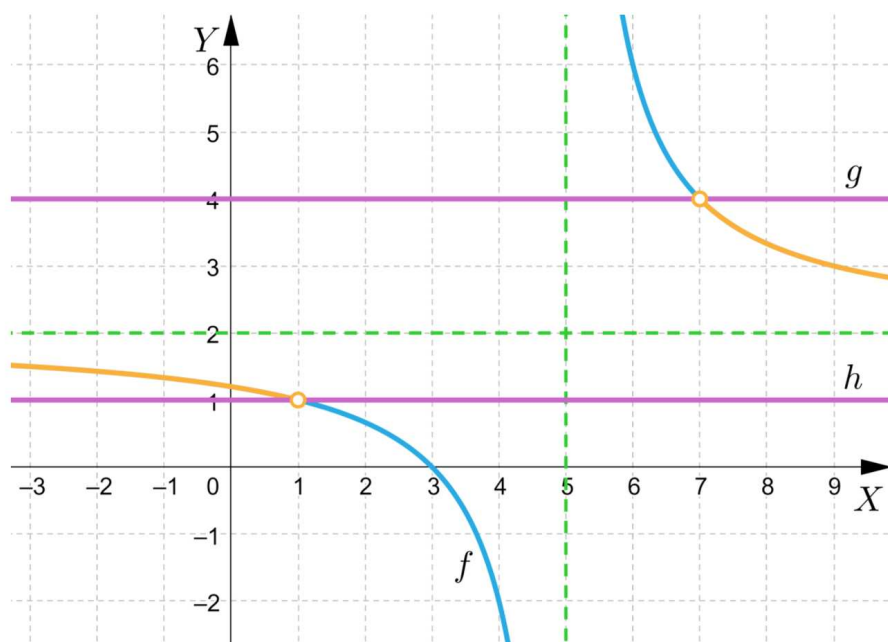
☐ $\mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 2, 3\}$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 2\}$

Ćwiczenie 2



Rysunek przedstawia graficzną ilustrację nierówności.



Wskaż nierówność z rysunku.

☐ $1 < \frac{4}{x-5} + 1 < 4$

☐ $1 < \frac{2x-6}{x-5} < 4$

☐ $1 < \frac{4}{x+2} + 2 < 4$

☐ $1 < \frac{4}{x-5} - 1 < 2$

Ćwiczenie 3



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Rozwiązaniem nierówności $\left| \frac{2x-5}{x+1} \right| \leq 2$ jest zbiór:

☐ $(-\infty, -1) \cup \langle \frac{3}{4}, \infty)$

☐ $(-\infty, -1)$

☐ $(-1, \infty)$

☐ $\langle \frac{3}{4}, \infty)$

Ćwiczenie 4



Ile liczb naturalnych spełnia nierówność $0 < \frac{3}{8-x} \leq \frac{1}{x}$? Uzupełnij odpowiedź, przeciągając odpowiednią liczbę.

Odpowiedź:

5

4

2

1

0

3

Ćwiczenie 5



Połącz nierówność z jej zbiorem rozwiązań.

$1 \leq \frac{x^2+2}{3x} \leq x$

$x \in \{1\} \cup \langle 2, \infty)$

$4x < \frac{4}{x} < x$

$x \in (-2, -1)$

$\left| \frac{x}{x-2} \right| < 1$

$x \in (-\infty, 1)$

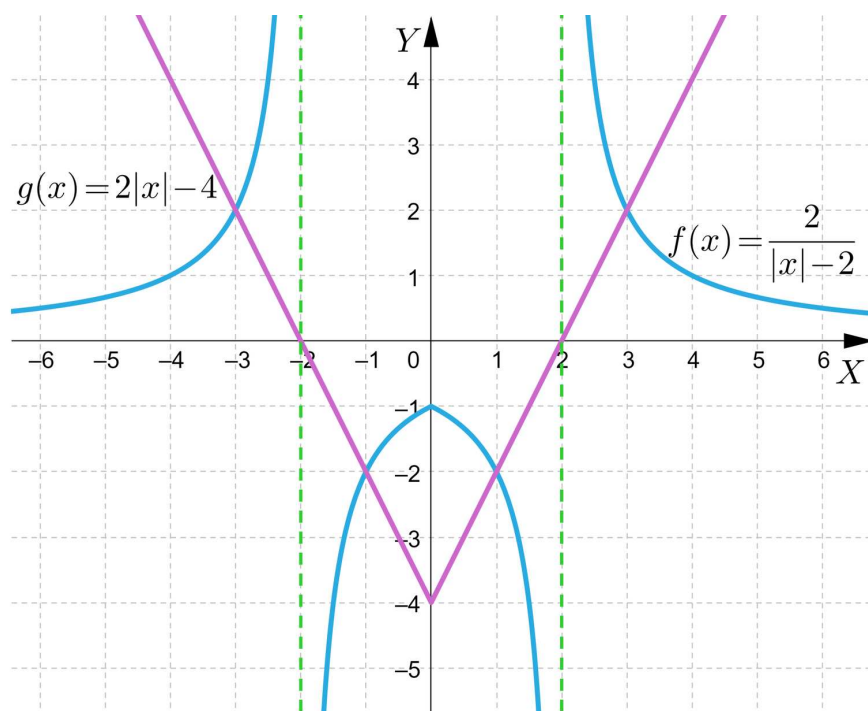
$0 \leq \frac{2x-1}{2x+1} \leq 1$

$x \in \langle \frac{1}{2}, \infty)$

Ćwiczenie 6



Rysunek przedstawia wykresy dwóch funkcji: $f(x) = \frac{2}{|x|-2}$ oraz $g(x) = 2|x| - 4$.



Zaznacz wszystkie poprawne stwierdzenia:

☐ $-4 \leq g(x) \leq f(x)$ dla $x \in \langle -1, 1 \rangle \cup \langle -3, -2 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle$

☐ $0 < f(x) \leq 2$ dla $x \in (-\infty, -3) \cup \langle 3, \infty)$

☐ $-2 < f(x) < -1$ dla $x \in \langle -1, 1 \rangle$

☐ $g(x) < f(x) < 4$ dla $x \in (-3, -2) \cup (2, 3)$

☐ $|f(x)| \leq 0,5$ dla $x \in (-\infty, -4) \cup \langle 4, \infty)$

☐ $-1 < f(x) < 0$ dla $x \in \{\emptyset\}$

☐ $0 < f(x) < g(x)$ dla $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

☐ $g(x) < f(x) < -1$ dla $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

Ćwiczenie 7



Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$. Rozwiąż algebraicznie i graficznie nierówność:
 $-2 \leq f(x-1) \leq x$.

Ćwiczenie 8



Uzasadnij, że żadna liczba ujemna nie spełnia nierówności: $\left| \frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \right| \leq 1$.

Dla nauczyciela

Autor: Karolina Nowak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Nierówność niewymierna podwójna

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)};$$

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówność wielomianową, wymierną,
- przekształca wyrażenia wymierne,
- szkicuje oraz rozpoznaje wykresy funkcji wielomianowej, homograficznej,
- ocenia efektywność stosowanych metod i dobiera je w sposób przemyślany,
- dokonuje analizy informacji, przetwarza je i wyciąga wnioski,
- argumentuje i uzasadnia swoje działania,
- integruje umiejętności z różnych działów matematyki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa,
- dyskusja,
- stacje zadaniowe.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w parach/małych grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,

- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Wprowadzenie” oraz „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Nierówność wymierna podwójna”, a następnie określa cele i kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęć: nierówność podwójna, układ nierówności, wartość bezwzględna, koniunkcja, iloczyn zbiorów. Koryguje (jeśli jest taka potrzeba) wypowiedzi uczniów oraz ilustruje je prostymi przykładami.
3. Nauczyciel inicjuje dyskusję z uczniami na temat metod rozwiązania nierówności wymiernej przedstawionych w przykładach i prosi wybrane osoby o analizę tych metod.

Faza realizacyjna:

1. Wszyscy uczniowie uczestniczą w obserwacji galerii zdjęć interaktywnych. Po odtworzeniu galerii nauczyciel zachęca uczniów do formułowania pytań i wątpliwości. Odpowiedzi na padające pytania w pierwszej kolejności udzielają inni uczniowie, a dopiero później nauczyciel.
2. Każdy uczeń indywidualnie realizuje Polecenie 2. Wybrani uczniowie prezentują odpowiedzi, jeden z uczniów zapisuje je na tablicy. Powstaje lista poleceń i odpowiedzi, które można sformułować z wykorzystaniem graficznej reprezentacji zadania.
3. Uczniowie tworzą 3-4 osobowe zespoły, których zadaniem jest wspólne wykonanie Polecenia 4.
4. Następnie zespoły przystępują do wykonania ćwiczeń zamieszczonych w sekcji „Sprawdź się” metodą stacji zadaniowych.

Faza podsumowująca:

1. Członkowie zespołów formułują ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”, które są omawiane z całą klasą.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Nierówność wymierna podwójna” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Jaką wcześniejszą wiedzę i umiejętności wykorzystali na lekcji? Co było dla nich (lub nadal jest) trudne?

Praca domowa:

1. Zadaniem uczniów jest ułożenie i rozwiązanie 3 nierówności wymiernych podwójnych.

.

Materiały pomocnicze:

- [Rozwiązywanie nierówności wymiernych](#)
- [Graficzne rozwiązywanie nierówności wymiernych](#)
- [Nierówność wymierna](#)

Wskazówki metodyczne:

- Galeria zdjęć interaktywnych może posłużyć jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem lub jako uzupełnienie lekcji „Zbiór rozwiązań nierówności wymiernej”.