Wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów

Wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów

Źródło: Pexels, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Ernst Mach

Źródło: dostępny w internecie: http://wikimedia.commons.org, domena publiczna.

Austriacki fizyk i filozof Ernst Mach (1838 r. – 1916 r.), zaliczany do empiriokrytycyzmu (zwanego drugim pozytywizmem), twierdził, że należy usunąć z nauki wiele pojęć uważanych przez niego za metafizyczne (np. pojęcia „atom”, „przyczyna”). Opisy zjawisk naukowych powinny być, według Macha, jak najkrótsze, aby skierować wysiłek na przedstawianie faktów. Taki punkt widzenia kwestionował tradycyjny sposób postrzegania nauki, aby dostarczać drobiazgowej wiedzy. Wpłynął jednak znacząco na rozwój logicznego pozytywizmu.

Dla Macha matematyka była dziedziną wiedzy, która najlepiej realizuje głoszone przez niego idee. Uważał, że: „***potęga matematyki polega na pomijaniu wszystkich myśli zbędnych i cudownej oszczędności operacji myślowych***”.

W przekonania Macha o upraszczaniu języka naukowego dobrze wpisują się wzory skróconego mnożenia, a w szczególności wzór na różnicę sześcianów, który poznamy w tym materiale.

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów.
> - Zastosujesz wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów do przekształcania wyrażeń algebraicznych i arytmetycznych.

Przeczytaj

Wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów dwóch wyrażeń możemy wyprowadzić w podobny sposób jak wzór na sumę sześcianów lub skorzystać po prostu ze wzoru na sumę sześcianów.

Poniżej oba sposoby otrzymania wzoru.

Pierwszy sposób

Chcemy zapisać wyrażenie $a^3 - b^3$ w postaci iloczynu. W tym celu do wyrażenia dodamy a^2b i odejmiemy a^2b.

$$a^3 - b^3 = a^3 + a^2b - a^2b - b^3$$

Grupujemy wyrazy i z pierwszej sumy wyłączamy przed nawias a^2, a z drugiej b.

$$a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - b^3 = a^2(a-b) + b\left(a^2 - b^2\right)$$

Różnicę $a^2 - b^2$ zapisujemy w postaci iloczynu $(a+b)(a-b)$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i z tak powstałego wyrażenia, wyłączamy przed nawias wspólny czynnik, czyli $(a-b)$.

$$a^3 - b^3 = a^2(a-b) + b(a+b)(a-b) = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Drugi sposób

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na sumę sześcianów, do którego w miejsce b podstawiamy $(-b)$.

$$a^3 + (-b)^3 = [a + (-b)] \cdot \left[a^2 - a \cdot (-b) + (-b)^2\right] = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na różnicę sześcianów dwóch wyrażeń.

Wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów dwóch wyrażeń:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Różnica sześcianów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi różnicy tych wyrażeń przez sumę kwadratów tych wyrażeń powiększoną o iloczyn tych wyrażeń.

Niekiedy wyrażenie a^2+ab+b^2 nazywamy **niepełnym kwadratem** sumy wyrażeń a i b. Wtedy wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów możemy zapisać słownie: *różnica sześcianów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi różnicy tych wyrażeń przez niepełny kwadrat ich sumy.*

Wyprowadzony wzór ma podobne zastosowania jak poznane wcześniej wzory skróconego mnożenia.

Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów, można niektóre sumy zapisywać w postaci iloczynów.

Przykład 1

Zapiszemy każde z wyrażeń w postaci iloczynu.

$$x^3-1=x^3-1^3=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

$$a^3-2=\left(a-\sqrt[3]{2}\right)\left(a^2+a\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$$

$$x^6-27=\left(x^2\right)^3-3^3=\left(x^2-3\right)\left(x^4+3x^2+9\right)$$

$$8x^3-125x=(2x)^3-\left(5\sqrt[3]{x}\right)^3=\left(2x-5\sqrt[3]{x}\right)\left(4x^2+2x\cdot5\sqrt[3]{x}+25\sqrt[3]{x^2}\right)=$$

$$=\left(2x-5\sqrt[3]{x}\right)\left(4x^2+10x\sqrt[3]{x}+25\sqrt[3]{x^2}\right)$$

Przykład 2

Przekształcimy różnice potęg na iloczyny, wykorzystując wzór na różnicę sześcianów.

$$x^6-a^6=\left(x^2\right)^3-\left(a^2\right)^3=\left(x^2-a^2\right)\left(x^4+a^2x^2+a^4\right)$$

$$\tfrac{8}{27}-x^{12}=\left(\tfrac{2}{3}-x^4\right)\left(\tfrac{4}{9}+\tfrac{2}{3}x^4+x^8\right)$$

Wykorzystanie wzoru na różnicę sześcianów dwóch wyrażeń znacznie ułatwia przekształcanie wyrażeń algebraicznych.

Przykład 3

Zapiszemy wyrażenie $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość dla $x=\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

Licznik i mianownik podanego ułamka rozkładamy na czynniki i skracamy.

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia – w miejsce x wstawiamy $\sqrt{3}$, wykonujemy wskazane działania i usuwamy niewymierność z mianownika ułamka.

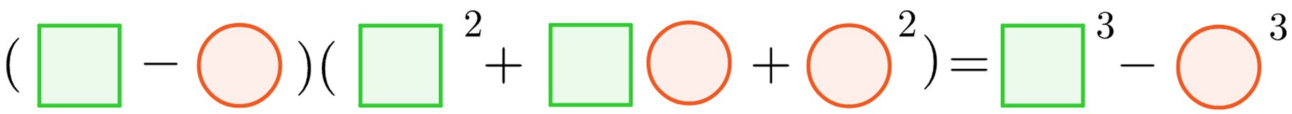
$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(4+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-4+3-\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia jest równa $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$.

Ważnym zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na różnicę sześcianów jest zapisywanie iloczynu w postaci różnicy.



Przykład 4

Zapiszemy iloczyny algebraiczne w postaci różnic.

$$(5a-1)\left(25a^2+5a+1\right) = (5a)^3 - 1^3 = 125a^3 - 1$$

$$(3x-2y)\left(9x^2+6xy+4y^2\right) = (3x)^3 - (2y)^3 = 27x^3 - 8y^3$$

$$\left(\sqrt[3]{3}a - a\right)\left(\sqrt[3]{9}a^2 + \sqrt[3]{3}a^2 + a^2\right) = 3a^3 - a^3 = 2a^3$$

Wzór skróconego mnożenia na sześcian różnicy można zastosować obliczając wartości wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 5

$$\left(2-\sqrt[3]{2}\right)\left(4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right) = 8 - 2 = 6$$

$$\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}+2\right) = 1^3 - \left(\sqrt{2}\right)^3 = 1 - 2\sqrt{2}$$

Słownik

wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów

różnica sześcianów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi różnicy tych wyrażeń przez sumę kwadratów tych wyrażeń powiększoną o iloczyn tych wyrażeń

Animacja

Polecenie 1

Zapisz podane iloczyny w postaci różnic, wykonując odpowiednie mnożenia.
Następnie zapoznaj się z animacją i jeszcze raz zamień iloczyny na różnice – tym razem korzystając z odpowiedniego wzoru. Porównaj otrzymane wyniki.

a. $(1-m)\left(m^2+m+1\right)$

b. $(x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)$

c. $\left(2x^2-3x\right)\left(4x^4+6x^3+9x^2\right)$

d. $\left(4-\sqrt{2}\right)\left(16+4\sqrt{2}+2\right)$

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dpf3qbodl

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wzoru skróconego mnożenia na różnicę sześcianów.

Polecenie 2

Oblicz objętość prostopadłościanu, którego wysokość jest równa $x-\frac{1}{2}$, a pole podstawy jest równe $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+x^2$, gdy $x>\frac{1}{2}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa I lub II

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- pozna wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów
- zastosuje wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów do przekształcania wyrażeń algebraicznych i arytmetycznych
- przeanalizuje problem algebraiczny i wybierze najefektywniejszy sposób rozwiązania
- dokona oceny własnej pracy i wyodrębni swoje mocne i słabe strony w zakresie wykorzystania wzorów skróconego mnożenia

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- rybki w akwarium
- mapa myśli

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał dostęp do komputera

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby przypomnieli sobie w domu zastosowania dotychczas poznanych wzorów skróconego mnożenia.
2. Grupa uczniów (4 – 5) – dalej zwana ekspertami – w domu zapoznaje się z materiałem z sekcji „Przeczytaj” tak, aby mogła przekazać pozostałym uczniom pozyskane informacje.

Faza wstępna:

Grupa wybranych wcześniej uczniów zapoznaje pozostałe osoby ze wzorem skróconego mnożenia na różnicę sześcianów.

Uczniowie wspólnie określają temat i cele zajęć oraz kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie pracują metodą rybki w akwarium – eksperci wspólnie oglądają animację, jednocześnie objaśniając jej kluczowe elementy. Tak, aby pozostali uczniowie obserwujący „rybki” zrozumieli nawet najtrudniejsze elementy rozwiązań prezentowanych przykładów.

Następnie eksperci prezentują przykłady zadań zapisanych w sekcji „Przeczytaj”.

Teraz uczniowie w małych grupach rozwiązują zadania interaktywne – eksperci czuwają nad ich pracą.

Faza podsumowująca:

Uczniowie wykonują wspólnie mapę myśli, na której zaznaczają kluczowe elementy związane z dotychczas poznanymi wzorami skróconego mnożenia stopnia 3. Mapa ta pozostanie w klasie i będzie uzupełniania, w miarę poznawania nowych wzorów.

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Uczniowie dokonują samooceny.

Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Działania na wyrażeniach algebraicznych – przykłady
- Działania na wyrażeniach algebraicznych – zadania

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana na następnych lekcjach podsumowujących umiejętności dotyczące wzorów skróconego mnożenia.