



Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

O polu trójkąta inaczej

Znajomość długości podstawy trójkąta i wysokości poprowadzonej na tę podstawę pozwala obliczyć jego pole. Podobnie długości dwóch boków i kąt między nimi jednoznacznie wyznaczają takie pole, co więcej jednoznacznie wyznaczają trójkąt, w przeciwieństwie do podstawy i wysokości trójkąta, które wyznaczają pole, ale nie wyznaczają trójkąta, jako figury (nie są cechą przystawania). Ale nie zawsze wyznaczenie pola trójkąta jest celem – bywa, że jest to tylko środek do celu, jakim może być na przykład wyznaczenie promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Tutaj przychodzi nam z pomocą twierdzenie sinusów, a raczej wnioski z tego twierdzenia, pozwalające badać zależności między polem trójkąta i promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie. Czas na praktyczne zastosowanie tych różnych zależności.

Twoje cele

- Zastosujesz poznane wzory na pole trójkąta w sytuacjach typowych.
- Zbudujesz model matematyczny i wybierzesz odpowiedni wzór do danej sytuacji.
- Zastosujesz poznane wzory do wyznaczenia zależności miarowych w trójkącie w sytuacjach problemowych.

- Zbadasz zależności między polem trójkąta wpisanego w okrąg i promieniem tego okręgu.

Przeczytaj

Różne spojrzenia na pole trójkąta

Trójkąt jest figurą, która „cieszy się szczególnymi względami” wśród autorów programów szkolnych. Pomyślcie bowiem, gdy nauczyciel w szkole poprosi o podanie wzoru na pole prostokąta jest niemal pewne, że przywołany zostanie tylko jeden – ten, w którym liczymy iloczyn długości boków: $a \cdot b$. Raczej nikt nie powie, że pole prostokąta wyraża się np. wzorem $\frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \sin \varphi$, gdzie d jest długością przekątnej, a φ kątem między przekątnymi. Tymczasem swoistym elementarzem, w odniesieniu do trójkąta, jest nie tylko wzór, w którym liczymy połowę iloczynu długości podstawy i wysokości, ale także ten, często przywoływany przy konstruowaniu zadań zamkniętych na maturę z matematyki, gdzie wykorzystujemy kąt między bokami, tj.: $\frac{1}{2}ab \cdot \sin \sphericalangle(a, b)$, czy ten najkrótszy i często nieuświadomiony: $p \cdot r$, który łączy promień okręgu wpisanego i obwód trójkąta. Ale teraz nadszedł czas, by te wzory wykorzystać.

Przykład 1

Rozważmy trójkąt o bokach długości 5, 6, 7 i zastanówmy się jak wiele dodatkowych informacji, związanych z tym trójkątem, da się otrzymać, przy wykorzystaniu poznanych dotychczas twierdzeń i zależności i tych, których zasoby znajdują się w dostępnym na egzaminie maturalnym zestawie wybranych wzorów matematycznych.

Zacznijmy od zastosowania [wzoru Herona](#). Zgodnie z przypisywaną Heronowi zależnością, pole dowolnego trójkąta opisuje wzór

$P_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta, a p jest połową jego obwodu.

W naszym przypadku mamy $p = \frac{5+6+7}{2} = 9$ oraz $P_{\Delta} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$.

Znajomość pola trójkąta i parametru p – opisującego połowę jego obwodu – pozwala łatwo obliczyć promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt. Skorzystamy ze wzoru

$$P_{\Delta} = p \cdot r,$$

który także cytowany jest w przywołanym zestawie wzorów. Mamy zatem:

$$6\sqrt{6} = 9 \cdot r, \text{ stąd } r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Ponieważ pole trójkąta o bokach długości a, b, c i promieniu R okręgu opisanego na trójkącie opisuje wzór

$$P_{\Delta} = \frac{abc}{4R},$$

więc $R = \frac{abc}{4P_{\Delta}}$.

W naszym przypadku otrzymujemy: $R = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 6 \sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}}$.

Przed nami jest wyznaczenie miar kątów naszego trójkąta. Ponieważ

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R,$$

więc w szczególności: $\frac{5}{\sin \alpha} = 2 \cdot \frac{35}{4\sqrt{6}}$.

Stąd $\sin \alpha = \frac{10\sqrt{6}}{35} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \approx 0,6999$, zatem $\alpha \approx 44^{\circ}$.

Podobnie $\frac{6}{\sin \beta} = 2 \cdot \frac{35}{4\sqrt{6}}$, zatem $\sin \beta = \frac{12\sqrt{6}}{35} \approx 0,8398$ oraz $\beta \approx 57^{\circ}$. Z bilansu kątów w trójkącie wynika, że trzeci z kątów ma przybliżoną miarę równą:
 $180^{\circ} - 44^{\circ} - 57^{\circ} = 79^{\circ}$.

Uwaga

Niebawem wyznaczenie miar kątów trójkąta o danych bokach będzie możliwe bez wyznaczania jego pola – przydatne będzie [twierdzenie cosinusów](#) – tymczasem jednak to właśnie pole stanowi punkt wyjścia do dalszych obliczeń. Warto jednak nadmienić, że aby wyznaczyć miary kątów nie ma potrzeby wyznaczać promienia okręgu opisanego – wystarczy zastosować inny wzór na pole trójkąta: $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, gdzie oczywiście a, b są długościami boków, a γ jest miarą kąta leżącego między tymi bokami.

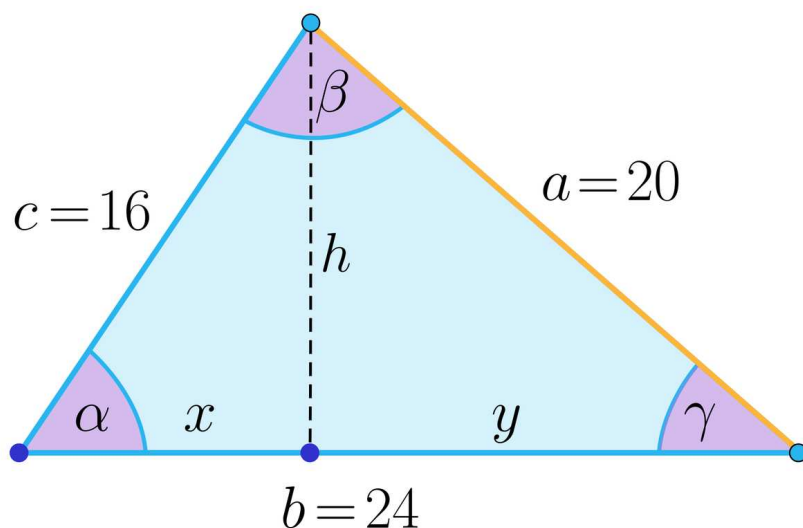
Rozwiążemy teraz zadanie, w którym wyznaczeniu polu czworokąta będzie towarzyszyło zastosowanie [twierdzenia sinusów](#), a sam czworokąt potraktujemy jako „sumę” dwóch trójkątów (użycie cudzysłowu w słowie suma nie jest konieczne, bowiem czworokąt jest w istocie sumą mnogościową dwóch trójkątów).

Przykład 2

Rozważmy analogiczny problem jak w przykładzie 1, ale przygotowaniem do zastosowania twierdzenia sinusów będą jedynie definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym i twierdzenie Pitagorasa (unikniemy tym samym sięgania do wzoru Herona).

Rozważmy trójkąt o bokach długości 16, 20, 24. Wyznamy jego pole, promień okręgu opisanego i wartości sinusów kątów tego trójkąta.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, gdzie h jest wysokością poprowadzoną na bok b , a x i y są długościami odcinków, na jakie spodek tej wysokości podzielił podstawę. Mamy wówczas, że $x + y = 24$.



Trójkąty o bokach x, h, c oraz y, h, a są oczywiście prostokątne, dlatego możemy zapisać równości

$$h^2 = c^2 - x^2 \text{ oraz } h^2 = a^2 - y^2.$$

Stąd mamy $c^2 - x^2 = a^2 - y^2$, czyli $16^2 - x^2 = 20^2 - y^2$.

Pozwala to zbudować układ równań
$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 256 - x^2 = 400 - y^2 \end{cases}$$

Ponieważ $y = 24 - x$, więc możemy drugą równość zapisać w postaci $256 - x^2 = 400 - (24 - x)^2$.

Po uproszczeniu przyjmuje ona postać $256 - 400 + 576 = 48x$.

Stąd $x = 9$ oraz $h^2 = 256 - 81 = 175$. Zatem $h = 5\sqrt{7}$ oraz $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Pole trójkąta jest więc równe: $P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5\sqrt{7} = 60\sqrt{7}$.

Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy: $R = \frac{20}{2 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16}} = \frac{32}{\sqrt{7}}$.

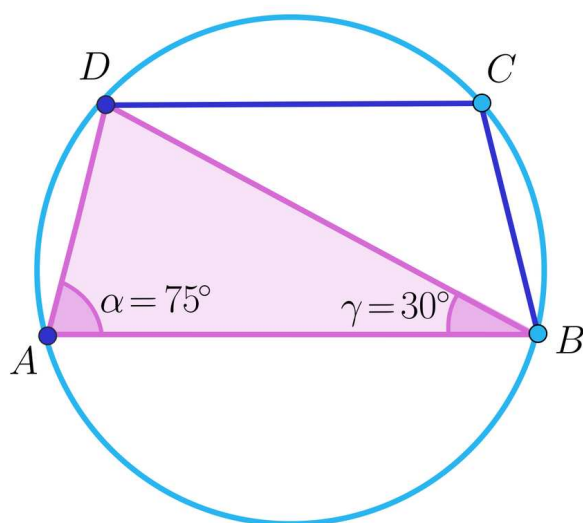
Korzystając ponownie z twierdzenia sinusów możemy wyznaczyć sinusy pozostałych kątów tego trójkąta:

$$\sin \beta = \frac{\frac{5\sqrt{7}}{16} \cdot 24}{20} = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \quad \sin \gamma = \frac{\frac{5\sqrt{7}}{16} \cdot 16}{20} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Przykład 3

Rozważmy trapez wpisany w okrąg o promieniu $R = 12$, którego kąt ma miarę 75° , a jego przekątna tworzy z podstawą kąt o mierze 30° . Naszym zadaniem jest obliczenie pola

tego trapezu. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Na początku musimy przypomnieć, że każdy trapez wpisany w okrąg jest równoramienny, zatem możemy rozważać dowolną z jego dwóch przekątnych, np. BD . Należy także zauważyć, że trójkąt ABD jest wpisany w ten sam okrąg, co dany trapez, zatem

$$\frac{|AD|}{\sin 30^\circ} = 2R = 24,$$

a ramię trapezu ma długość $|AD| = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$.

Ponieważ $|\sphericalangle ADB| = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$, więc $\frac{|AB|}{\sin 75^\circ} = 24$.

Stąd $|AB| = |BD| = 24 \cdot \sin 75^\circ$.

Oczywiście moglibyśmy wyznaczać długość wysokości trapezu i jego krótszej podstawy, ale dla ułatwienia skorzystamy z faktu, że pole trapezu jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD .

$$\text{Zatem } P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |BD| \cdot \sin 45^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Stąd } P_{ABCD} &= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \sin 75^\circ \cdot \left(24 \cdot \sin 75^\circ \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= 12 \cdot \sin 75^\circ \cdot \left(12 \cdot \sin 75^\circ + 6\sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

Jeśli „przeszkadza” nam zapis $\sin 75^\circ$, jako oznaczenie pewnej liczby, to możemy podstawić przybliżoną wartość z tablic (0,9659) lub uwierzyć (przy zagadnieniach z trygonometrii będzie to wyjaśnione), że $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Słownik

wzór Herona

wzór pozwalający obliczyć pole trójkąta, jeśli znane są długości a , b , c jego boków; niech

$p = \frac{a+b+c}{2}$ oznacza połowę obwodu trójkąta – wtedy pole S wynosi:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

twierdzenie Snelliusa

w matematyce zamienna nazwa twierdzenia sinusów, określającego związek między bokami i kątami w trójkącie.

twierdzenie Carnota

w matematyce zamienna nazwa twierdzenia cosinusów, określającego związek między kątem i bokami w trójkącie

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Uważnie zapoznaj się z prezentacją, a następnie wykonaj polecenia.

Polecenie 2

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Dokładna wartość $\sin 75^\circ$ jest równa:

$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$.

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$.

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Polecenie 3

Oblicz pole trójkąta ABC , w którym mamy dane: $|AB| = 2$, $|AC| = \sqrt{6}$, $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Jeden z kątów trójkąta ma miarę 150° , a bok leżący naprzeciw tego kąta ma długość 4, równą iloczynowi długości pozostałych boków. Oblicz pole tego trójkąta.

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



W okrąg o promieniu $R = 13$ wpisano trójkąt ABC , którego dwa boki mają długość odpowiednio $|AB| = 24$ i $|BC| = 13$. Oblicz pole tego trójkąta.

Ćwiczenie 6

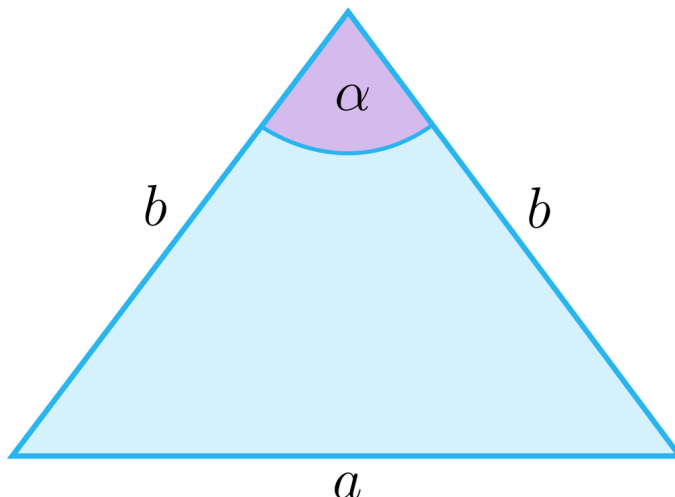


Pole trójkąta ABC jest równe 18. Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest większy niż 3.

Ćwiczenie 7



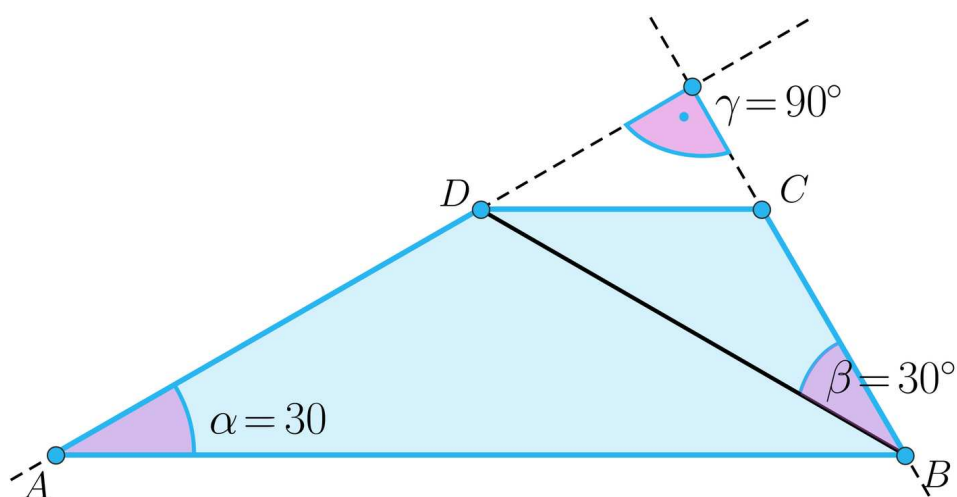
Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę α , jak na rysunku. Wyznacz stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola tego trójkąta.



Ćwiczenie 8



Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Proste zawierające ramiona trapezu są prostopadłe, jak na rysunku.



Kąt BAC ma miarę 30° i jest równy kątowi, jaki przekątna BD tworzy z ramieniem BC trapezu. Różnica $R - r$ promieni okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ABD i BCD jest równa $\sqrt{3} - 1$. Oblicz pole trapezu $ABCD$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Temat: Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria PP

2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;

5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma$;

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty)

VII. Trygonometria PR

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje zależności między bokami i kątami w trójkącie
- stosuje twierdzenie sinusów do wyznaczania zależności miarowych w trójkącie
- korzysta z wartości dokładnych i przybliżonych funkcji trygonometrycznych
- wykorzystuje wzory na pole trójkąta
- buduje strategie rozwiązywania złożonych problemów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- zestaw wzorów matematycznych
- projektor multimedialny,
- zestaw wzorów matematycznych
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel podłącza projektor multimedialny do komputera. Sprawdza urządzenia audio. Przygotowuje dla każdego z uczniów zestaw wzorów matematycznych, dopuszczonych do użytku na egzaminie maturalnym.

Faza wstępna:

- Nauczyciel prosi uczniów o podanie znanych im wzorów na pola prostokąta i trójkąta. Prowadzi dyskusję na temat zastosowań tych wzorów.
- Nauczyciel prosi uczniów o zapisanie wzorów na pole trójkąta, w szczególności tych, do dowodów których stosowano twierdzenie sinusów.
- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Nauczyciel formułuje problem opisany w Przykładzie 1. i prosi o podanie strategii jego rozwiązania. Steruje dyskusją w taki sposób, by punktem wyjścia stało się obliczenie pola trójkąta przy wykorzystaniu twierdzenia sinusów. Uczniowie pod kierunkiem

nauczyciela wyznaczają miary kątów danego trójkąta i promienie okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

- Nauczyciel formułuje problem opisany w Przykładzie 2. i dorysowuje wysokość trójkąta poprowadzoną na bok o długości 24. Prosi o zbudowanie układu równań, który poprzez zastosowanie twierdzenia Pitagorasa pozwoli obliczyć boki powstałych trójkątów prostokątnych i w konsekwencji zastosować definicje funkcji trygonometrycznych.
- Nauczyciel formułuje problem opisany w Przykładzie 3. i prosi uczniów o podanie strategii rozwiązania. Sugeruje taki model triangulacji, który pozwala obliczyć pole trapezu. Nauczyciel wskazuje na możliwość obliczenia wartości przybliżonych funkcji trygonometrycznych i wartości dokładnych, przy zastosowaniu wzoru na sinus sumy argumentów.
- Uczniowie zapoznają się z prezentacją multimedialną. Następnie pracując w grupach wykonują polecenia zapisane pod prezentacją. W razie potrzeby nauczyciel wskazuje miejsce (slajd) w prezentacji, gdzie uczniowie mogą znaleźć pomoc w rozwiązaniu.
- Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji. Inicjuje dyskusję na temat zastosowania poznanych wzorów na pole trójkąta.

Praca domowa:

- Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

[Twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentację multimedialną można wykorzystywać zarówno w trakcie powtórzenia wiadomości z planimetrii, jak również przy okazji rozwiązywania zadań w trakcie przygotowań do egzaminu maturalnego z matematyki.