Co to znaczy, że ciąg jest zbieżny?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Co to znaczy, że ciąg jest zbieżny?

Źródło: Dean Marston, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Ciąg nieskończony to taki, który posiada nieskończenie wiele wyrazów. Jednym z najważniejszych pojęć związanych z ciągami nieskończonymi jest pojęcie granicy. Wiąże się z nim bardzo ważna własność, którą nazywamy zbieżnością ciągu i której poświęcony będzie ten temat. Dowiemy się czym są ciągi zbieżne oraz poznamy przykłady zarówno ciągów zbieżnych jak i takich, które zbieżne nie są. Poznamy również związek pomiędzy zbieżnością ciągu a posiadaniem przez niego granicy.

Twoje cele

- Dowiesz się co to znaczy, że ciąg jest zbieżny.
- Poznasz przykłady ciągów zbieżnych oraz takich, które nie są zbieżne.
- Zrozumiesz związek między zbieżnością ciągu oraz granicą ciągu.

Przeczytaj

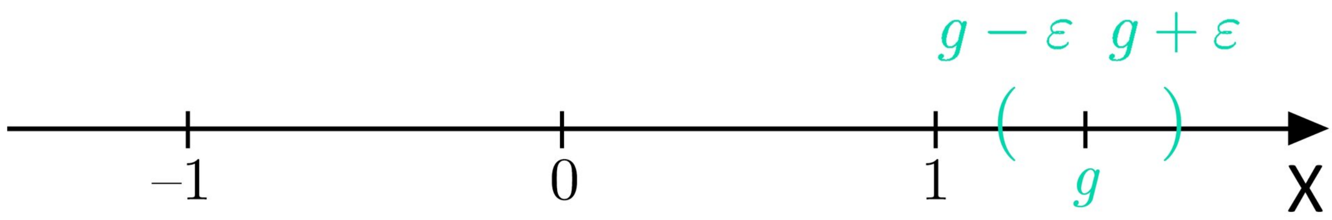
Pojęcie ciągu zbieżnego jest ściśle związane z granicą ciągu. Przypomnijmy zatem definicję granicy ciągu.

> **Definicja: Granica ciągu**
>
> Niech dany będzie ciąg nieskończony (a_n). Powiemy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą tego ciągu, jeśli dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$ zachodzi nierówność
>
> $$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Intuicyjnie powyższa definicja oznacza, że liczbę rzeczywistą g nazywamy granicą ciągu nieskończonego, jeśli w dowolnym jej otoczeniu (w szczególności w dowolnie małym, tzn. o dowolnie małym promieniu) znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego.

Okazuje się, że nie każdy ciąg nieskończony posiada granicę. Spójrzmy na poniższy przykład.

> **Przykład 1**
>
> Rozważmy ciąg dany wzorem
>
> $$a_n = (-1)^n$$
>
> Ponieważ wyrażenie $(-1)^n$ jest równe 1 dla n będących liczbami naturalnymi parzystymi oraz jest równe -1 dla n będących liczbami naturalnymi nieparzystymi, więc kolejne wyrazy ciągu (a_n) można zapisać następująco
>
> $$-1,1,-1,1,-1,1,\ldots$$
>
> Zatem ciąg (a_n) przyjmuje tylko dwie różne wartości -1 oraz 1 i każda z nich powtarza się nieskończoną ilość razy. Ta obserwacja pozwala nam stwierdzić, że ciąg ten nie posiada granicy, gdyż nie istnieje liczba rzeczywista taka, że w dowolnym jej otoczeniu znajdą się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu. Istotnie, jeśli g jest dowolnie wybraną liczbą rzeczywistą, to dobierając dostatecznie małą liczbę dodatnią ε, otocznie liczby g o promieniu ε, tzn. przedział $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$, nie będzie zawierać co najmniej jednej z liczb -1 lub 1



Powyższa obserwacja pozwala nam dokonać klasyfikacji ciągów nieskończonych w zależności od tego czy posiadają one granice czy też nie.

Definicja: Ciąg zbieżny

Ciąg nieskończony (a_n) nazywamy zbieżnym, jeśli posiada on granicę $g \in \mathbb{R}$ (tzn. posiada on granicę będącą liczbą rzeczywistą).

Spójrzmy na kolejne przykłady ilustrujące powyższą definicję.

Przykład 2

Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ciągiem zbieżnym, gdyż posiada on granicę równą 0. Rozważmy teraz ciąg dany wzorem

$$a_n = 3 + \frac{1}{n}$$

Wiemy, że $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Oznacza to, że w dowolnie małym otoczeniu liczby 0 znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu. Jeśli do każdego wyrazu ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ dodamy liczbę 3, to wówczas w dowolnie małym otoczeniu liczby 3 znajdą się prawie wszystkie wyrazy ciągu $a_n = 3 + \frac{1}{n}$. Oznacza to, że granica tego ciągu jest równa 3, zatem jest to również ciąg zbieżny.

Przykład 3

Rozważmy ciąg dany wzorem

$$a_n = 2\cos(\pi n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Policzmy kilka początkowych wyrazów tego ciągu

$$a_1 = 2\cos(\pi) = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$a_2 = 2\cos(2\pi) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 2\cos(3\pi) = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$a_4 = 2\cos(4\pi) = 2 \cdot 1 = 2$$

Z powyższego oraz faktu, że funkcja cosinus jest funkcją okresową o okresie równym 2π wynika, że $a_n = -2$ dla $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$ (tzn. gdy n jest liczbą nieparzystą) oraz $a_n = 2$ dla $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ (tzn. gdy n jest liczbą parzystą). Rozumując teraz analogicznie jak w przykładzie 1., możemy stwierdzić, że ciąg dany wzorem $a_n = 2\cos(\pi n)$ nie posiada granicy, a zatem nie jest zbieżny.

Przykład 4

Rozważmy ciąg dany wzorem

$$a_n = \sin(\pi n) - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Policzmy kilka początkowych wyrazów tego ciągu

$$a_1 = \sin(\pi) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$a_2 = \sin(2\pi) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$a_3 = \sin(3\pi) - 1 = 0 - 1 = -1$$

Ponieważ funkcja sinus jest funkcją okresową o okresie równym 2π, więc $\sin(\pi n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że nasz ciąg jest ciągiem stałym takim, że $a_n = -1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ciągi stałe są ciągami zbieżnymi, gdyż ich granica jest równa tej stałej wartości (w naszym przypadku $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -1$).

Ciekawostka

Okazuje się, że suma dwóch ciągów nie będących ciągami zbieżnymi może być ciągiem zbieżnym. Aby wykazać ten fakt, rozważmy dwa ciągi.

$$a_n = (-1)^n \quad , \quad b_n = (-1)^{n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wypiszmy po kilka początkowych wyrazów każdego z ciągów.

$$a_1 = (-1)^1 = -1, a_2 = (-1)^2 = 1, a_3 = (-1)^3 = -1, a_4 = (-1)^4 = 1$$

$$b_1 = (-1)^2 = 1, b_2 = (-1)^3 = -1, b_3 = (-1)^4 = 1, b_4 = (-1)^5 = -1$$

Oba ciągi przyjmują zatem na zmianę wartości 1 oraz -1. Rozumując więc analogicznie jak w przykładzie 1., możemy stwierdzić, że oba ciągi nie są zbieżne. Z drugiej strony widzimy, że dla $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$ (tzn. gdy n jest liczbą nieparzystą) $a_n = -1$, natomiast $b_n = 1$. Gdy $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ (tzn. gdy n jest liczbą parzystą) $a_n = 1$, natomiast $b_n = -1$. Wynika stąd, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$a_n + b_n = -1 + 1 = 0.$$

Ciąg $(a_n + b_n)$ jest więc ciągiem stałym równym 0. Jest on więc zbieżny.

Słownik

prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego

wszystkie wyrazy ciągu poza co najwyżej ich skończoną ilością

otoczenie punktu

otoczeniem punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy zbiór

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją, na której przedstawiono sposób na wyznaczenie granicy ciągu zbieżnego $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Po zapoznaniu się z animacją, wykonaj zamieszczone pod nią polecenia.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DwPWtOdO0

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zbieżności ciągu.

Polecenie 2

Postepując podobnie jak przedstawiono w animacji uzasadnij, obliczając granicę, że ciąg $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ jest zbieżny.

Polecenie 3

Który z podanych ciągów jest zbieżny?

A. $a_n = \frac{3n}{6n+4}$
B. $a_n = \frac{2n+6}{4}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Co to znaczy prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Dowiesz się co to znaczy, że ciąg jest zbieżny.
- Poznasz przykłady ciągów zbieżnych oraz takich, które nie są zbieżne.
- Zrozumiesz związek między zbieżnością ciągu oraz granicą ciągu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- film;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Co to znaczy, że ciąg jest zbieżny?” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Co to znaczy, że ciąg jest zbieżny?” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Animacja” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

Własności ciągów zbieżnych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Co to znaczy, że ciąg jest zbieżny?”.