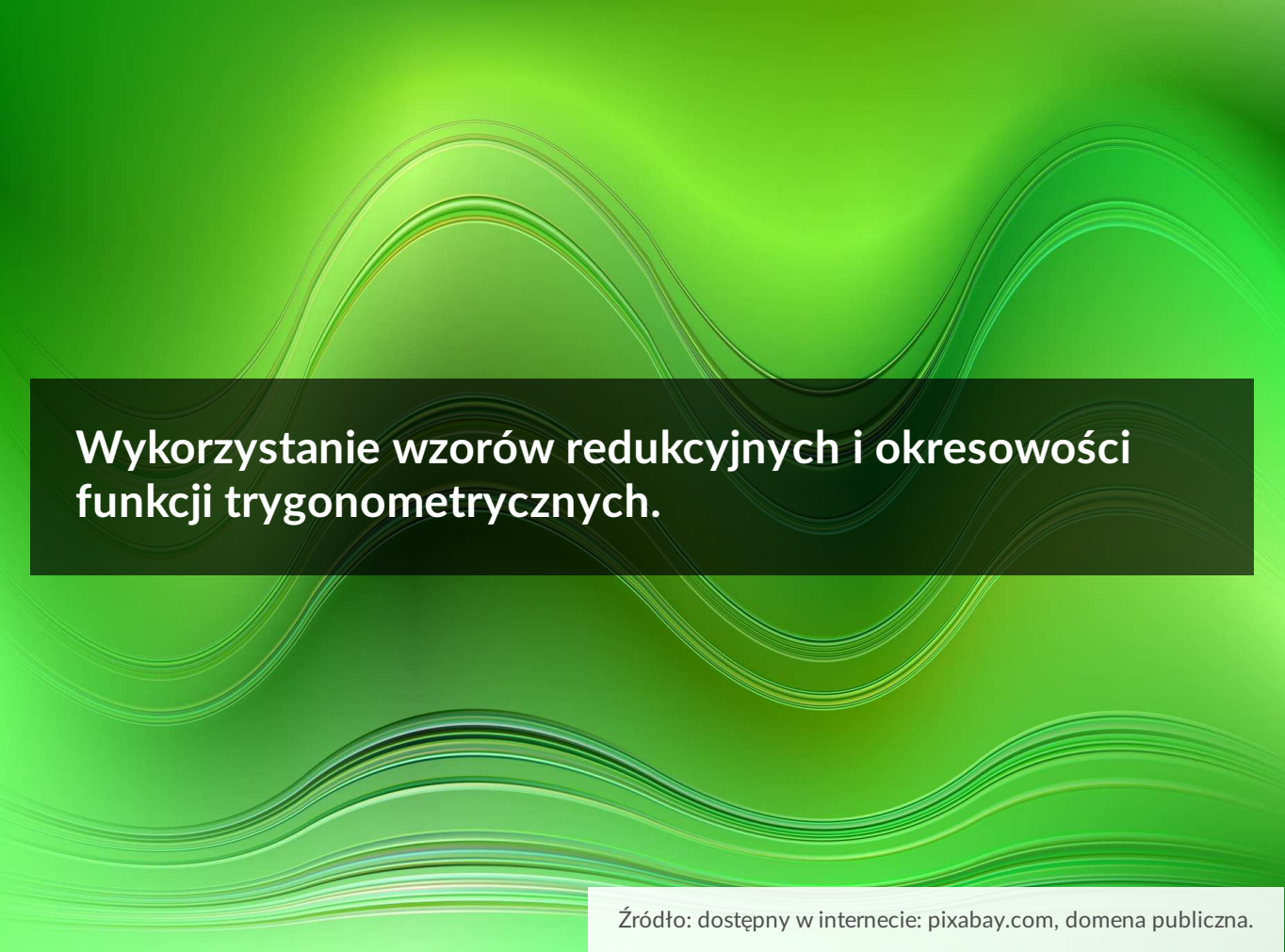




Wykorzystanie wzorów redukcyjnych i okresowości funkcji trygonometrycznych.

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykorzystanie wzorów redukcyjnych i okresowości funkcji trygonometrycznych.

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tej lekcji powtórzymy i zastosujemy do rozwiązywania zadań wszystkie wzory redukcyjne, okresowość funkcji trygonometrycznych oraz podstawowe tożsamości trygonometryczne. Postaramy się omówić na przykładach możliwie najwięcej różnego rodzaju zadań - obliczeniowych i dowodowych. Naszym głównym celem jest powtórzenie wszystkich wspomnianych zależności oraz nabranie biegłości w rozwiązywaniu zadań.

Twoje cele

- Zastosujesz wzory redukcyjne do obliczania wartości wyrażeń trygonometrycznych.
- Zastosujesz wzory redukcyjne do dowodzenia twierdzeń.

Przeczytaj

Zacniemy od przypomnienia najważniejszych zależności, z których będziemy korzystać w tej lekcji.

Parzystość/nieparzystość funkcji trygonometrycznych: dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi:

- $\cos(-x) = \cos x$ - parzystość funkcji cosinus,
- $\sin(-x) = -\sin x$ - nieparzystość funkcji sinus,
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ - nieparzystość funkcji tangens.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne prawdziwe dla $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ oraz } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Wzory redukcyjne prawdziwe dla $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(2\pi + x) = \sin x$$

$$\cos(2\pi + x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(2\pi + x) = \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Okresowość funkcji trygonometrycznych - okresem zasadniczym funkcji sinus i funkcji cosinus jest liczba 2π , zaś okresem zasadniczym funkcji cosinus jest liczba π .

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Analizując kolejne wzory redukcyjne, można zauważyć pewną prawidłowość. Zanim ją opiszemy, wprowadzimy pojęcie kofunkcji. Mówimy, że kofunkcją sinus jest cosinus (i odwrotnie). Kofunkcją funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ jest funkcja o wzorze $g(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (i odwrotnie).

Zauważmy teraz, że każde dodanie do lub odjęcie od argumentu funkcji trygonometrycznej liczby $\frac{\pi}{2}$ zamienia daną funkcję na kofunkcję. Prześledźmy to na przykładach:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (\pi + x)\right) = \cos(\pi + x) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = -\operatorname{tg} x$$

Całą procedurę można zapisać w postaci kilku kroków:

1. Zapisujemy argument funkcji trygonometrycznej w postaci $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm x$, $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
2. Ustalamy znak wartości rozważanego wyrażenia trygonometrycznego.
3. Jeśli k jest liczbą nieparzystą, to funkcja przechodzi na kofunkcję, zaś jeśli k jest liczbą parzystą, to funkcja zostaje bez zmian.

Krok procedury	Przykład
Zapisujemy argument funkcji trygonometrycznej w postaci $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm x$, $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.	$\cos \frac{18\pi}{7} = \cos(5 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14})$.
Ustalamy znak wartości rozważanego wyrażenia trygonometrycznego.	Wartość wyrażenia $\cos \frac{18\pi}{7}$ jest ujemna (drugie ramię kąta $5 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14}$ leży w II ćwiartce układu współrzędnych).
Jeśli k jest liczbą nieparzystą, to funkcja przechodzi na kofunkcję, zaś jeśli k jest liczbą parzystą, to funkcja zostaje bez zmian.	Ponieważ $k = 5$ jest liczbą nieparzystą, więc funkcja cosinus przechodzi na sinus: $\cos(5 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14}) = -\sin \frac{\pi}{14}$.

Przykład 1

Obliczymy wartość wyrażenia $\sin 12^\circ + \sin 36^\circ + \sin 192^\circ + \sin 216^\circ$.

$$\begin{aligned}
 &\sin 12^\circ + \sin 36^\circ + \sin 192^\circ + \sin 216^\circ = \\
 &= \sin 12^\circ + \sin 36^\circ + \sin(180^\circ + 12^\circ) + \sin(180^\circ + 36^\circ) = \\
 &= \sin 12^\circ + \sin 36^\circ - \sin 12^\circ - \sin 36^\circ = 0
 \end{aligned}$$

Przykład 2

Obliczymy wartość wyrażenia: $\frac{(\frac{1}{\operatorname{tg} 44^\circ} + \operatorname{tg} 226^\circ) \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \frac{1}{\operatorname{tg} 72^\circ \cdot \operatorname{tg} 18^\circ}$.

$$\begin{aligned}
 &\frac{(\frac{1}{\operatorname{tg} 44^\circ} + \operatorname{tg} 226^\circ) \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \frac{1}{\operatorname{tg} 72^\circ \cdot \operatorname{tg} 18^\circ} = \\
 &= \frac{(\frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - 46^\circ)} + \operatorname{tg}(180^\circ + 46^\circ)) \cos(360^\circ + 46^\circ)}{\cos(270^\circ + 46^\circ)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - 18^\circ) \cdot \operatorname{tg} 18^\circ} = \\
 &= \frac{(\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} 46^\circ}} + \operatorname{tg} 46^\circ) \cos 46^\circ}{\sin 46^\circ} - \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} 18^\circ} \cdot \operatorname{tg} 18^\circ} = \\
 &= \frac{(\operatorname{tg} 46^\circ + \operatorname{tg} 46^\circ) \cos 46^\circ}{\sin 46^\circ} - \frac{1}{1} = \frac{2 \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \cos 46^\circ}{\sin 46^\circ} - \frac{1}{1} = \\
 &= \frac{2 \cdot \frac{\sin 46^\circ}{\cos 46^\circ} \cdot \cos 46^\circ}{\sin 46^\circ} - \frac{1}{1} = \frac{2 \cdot \sin 46^\circ}{\sin 46^\circ} - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1
 \end{aligned}$$

Przykład 3

Wiedząc, że $\sin(\pi - t) = \sin t$, $t \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, obliczymy:

a) $\sin(\pi + t)$

Zauważmy najpierw, że $\sin(\pi - t) = \sin t$.

Zatem $\sin(\pi + t) = -\sin t = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

b) $\cos(\pi - t)$

Ponieważ $\cos(\pi - t) = -\cos t$ oraz $\sin t = -\frac{2}{3}$, skorzystamy z jedynki trygonometrycznej: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{5}{9}$.

Ponieważ $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, więc $\cos t = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Zatem

$$\cos(\pi - t) = -\cos t = -\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$

Mamy $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$. Z poprzednich podpunktów mamy $\sin t = -\frac{2}{3}$ oraz

$$\cos t = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ więc } -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Przykład 4

Obliczymy wartość wyrażenia $\sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{13\pi}{10}$.

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{13\pi}{10} &= \sin \frac{2\pi}{10} + \cos \frac{13\pi}{10} = \sin\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{10} + \frac{3\pi}{10}\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{10}\right) = \cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{3\pi}{10} = 0 \end{aligned}$$

Przykład 5

Obliczymy wartość wyrażenia $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \dots + \sin 360^\circ$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sin 100^\circ + \sin 110^\circ + \sin 120^\circ + \dots + \sin 170^\circ &= \\ &= \sin(90^\circ + 10^\circ) + \sin(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ + 30^\circ) + \dots + \sin(90^\circ + 80^\circ) = \\ &= \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 80^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 190^\circ + \sin 200^\circ + \sin 210^\circ + \dots + \sin 260^\circ &= \\ &= \sin(180^\circ + 10^\circ) + \sin(180^\circ + 20^\circ) + \sin(180^\circ + 30^\circ) + \dots \\ &+ \sin(180^\circ + 80^\circ) = -\sin 10^\circ - \sin 20^\circ - \sin 30^\circ - \dots - \sin 80^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 280^\circ + \sin 290^\circ + \sin 300^\circ + \dots + \sin 350^\circ &= \\ &= \sin(270^\circ + 10^\circ) + \sin(270^\circ + 20^\circ) + \sin(270^\circ + 30^\circ) + \dots \\ &+ \sin(270^\circ + 80^\circ) = -\cos 10^\circ - \cos 20^\circ - \cos 30^\circ - \dots - \cos 80^\circ \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
& \sin 10^\circ + \dots + \sin 80^\circ + \sin 90^\circ + \sin 100^\circ + \dots + \sin 170^\circ + \sin 180^\circ + \\
& + \sin 190^\circ + \dots + \sin 260^\circ + \sin 270^\circ + \sin 280^\circ + \dots + \sin 350^\circ + \sin 360^\circ = \\
& = \sin 10^\circ + \dots + \sin 80^\circ + \sin 90^\circ + \cos 10^\circ + \dots + \cos 80^\circ + \sin 180^\circ + \\
& - \sin 10^\circ - \dots - \sin 80^\circ + \sin 270^\circ - \cos 10^\circ - \dots - \cos 80^\circ + \sin 360^\circ = \\
& = \sin 90^\circ + \sin 180^\circ + \sin 270^\circ + \sin 360^\circ = 1 + 0 - 1 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Przykład 6

Porównamy liczby $\cos 87^\circ$ i $\operatorname{tg} 183^\circ$.

Zauważmy, że $\cos 87^\circ = \cos(90^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ$ oraz $\operatorname{tg} 183^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 3^\circ) = \operatorname{tg} 3^\circ$.

Aby porównać liczby $\cos 87^\circ$ i $\operatorname{tg} 183^\circ$, wystarczy porównać liczby $\sin 3^\circ$ i $\operatorname{tg} 3^\circ$. W tym celu zbadamy znak różnicy tych wyrażeń:

$\sin 3^\circ - \operatorname{tg} 3^\circ = \sin 3^\circ - \frac{\sin 3^\circ}{\cos 3^\circ} = \sin 3^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos 3^\circ}\right) = \sin 3^\circ \cdot \frac{\cos 3^\circ - 1}{\cos 3^\circ}$. Ponieważ dla $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ mamy $0 < \sin \alpha < 1$ oraz $0 < \cos \alpha < 1$, więc $\cos 3^\circ - 1 < 0$. Stąd $\sin 3^\circ \cdot \frac{\cos 3^\circ - 1}{\cos 3^\circ} < 0$, więc $\sin 3^\circ - \operatorname{tg} 3^\circ < 0 \Leftrightarrow \sin 3^\circ < \operatorname{tg} 3^\circ$.

Słownik

okresowość funkcji trygonometrycznych

okresem podstawowym funkcji sinus i funkcji cosinus jest liczba 2π ; okresem zasadniczym funkcji tangens jest liczba π

parzystość funkcji cosinus

funkcja cosinus jest funkcją parzystą, co oznacza, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\cos(-x) = \cos x$

nieparzystość funkcji sinus

funkcja sinus jest funkcją nieparzystą, co oznacza, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\sin(-x) = -\sin x$

nieparzystość funkcji tangens

funkcja tangens jest funkcją nieparzystą, co oznacza, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ zachodzi równość $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z informacjami zawartymi w galerii zdjęć. Na ich podstawie wykonaj polecenie nr 2.

Polecenie 2

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

	Pytanie	
	Wyrażenie $\sin(\pi - x)$ jest tożsamościowo równe wyrażeniu	
$\sin x$ ☐	$\cos(\frac{3\pi}{2} + x)$ ☐	$\cos(\frac{\pi}{2} + x)$ ☐
	Wyrażenie $\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$ jest tożsamościowo równe wyrażeniu	
$-\sin x$ ☐	$\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ ☐	$\cos(\frac{\pi}{2} + x)$ ☐
	Wyrażenie $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - x)$ jest tożsamościowo równe wyrażeniu	
$\operatorname{tg} x$ ☐	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ ☐	$-\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ ☐
	Wyrażenie $\cos(x - 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ jest tożsamościowo równe wyrażeniu	
$\sin x$ ☐	$-\cos x$ ☐	$\cos x$ ☐
	Wyrażenie $\operatorname{tg}(x - 3k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ jest tożsamościowo równe wyrażeniu	
$\operatorname{tg} x$ ☐	$-\operatorname{tg} x$ ☐	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ ☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Przyporządkuj wyrażenia trygonometryczne wypisane poniżej tak, aby były tożsamościowo równe tym znajdującym się w nagłówkach. Przeciągnij i upuść.

$\sin x$

$-\sin x$

$\cos x$

$-\cos x$

$\sin(\pi - x)$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$\cos(\pi + x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$\cos(2\pi + x)$

$\cos(\pi - x)$

$\cos(-x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

$\sin(2\pi - x)$

$\sin(\pi + x)$

$\cos(2\pi - x)$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$\sin(2\pi + x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sin(-x)$

Ćwiczenie 2



Przyporządkuj wyrażenia trygonometryczne wypisane poniżej tak, aby były tożsamościowo równe tym znajdującym się w nagłówkach. Przeciągnij i upuść.

$\operatorname{tg} x$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi - x)}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x)}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(-x)}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + x)}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(2\pi - x)}$$

$$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - x)$$

$$\operatorname{tg}(\pi - x)$$

$$\operatorname{tg}(2\pi + x)$$

$$\operatorname{tg}(-x)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(2\pi + x)}$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - x)}$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - x)$$

$$\operatorname{tg}(\pi + x)$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi + x)}$$

$$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + x)$$

$-\operatorname{tg} x$

$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$

$-\frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Ćwiczenie 3



Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sin^2 393^\circ + \sin^2 777^\circ$

b) $\operatorname{tg} 560^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 250^\circ$

Ćwiczenie 4



Porównaj liczby. Wpisz znak $<$ albo $>$.

$$\operatorname{tg} 181^\circ \quad \boxed{} \quad \cos 89^\circ$$

$$\sin 178^\circ \quad \boxed{} \quad \frac{-1}{\operatorname{tg} 92^\circ}$$

$$\cos 95^\circ \quad \boxed{} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} 265^\circ}$$

$$\cos 1^\circ \quad \boxed{} \quad \operatorname{tg} 91^\circ$$

Ćwiczenie 5



Wiadomo, że $\cos t = -\frac{1}{3}$ i $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Połącz w pary wyrażenia o równych wartościach.

$$\cos(\pi - t)$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$-2\sqrt{2}$$

$$\sin t$$

$$2\sqrt{2}$$

$$\sin(\pi + t)$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)}$$

$$-\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} t$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ćwiczenie 6



Rozwiąż test. Wskaż poprawną odpowiedź.

	Pytanie	
	Wartość wyrażenia $\frac{\cos^2 112^\circ - \sin^2 382^\circ}{\operatorname{tg} 112^\circ}$ jest równa	
0 ☐	wartości wyrażenia $-\frac{1}{\operatorname{tg} 22^\circ}$ ☐	wartości wyrażenia $-2 \sin 22^\circ \cdot \cos 22^\circ$ ☐
	Wartość wyrażenia $2 \sin 870^\circ \cdot \cos 660^\circ - \operatorname{tg} 369^\circ \cdot \operatorname{tg} 279^\circ$ jest równa	
-0,5 ☐	1,5 ☐	2,5 ☐
	Wartość wyrażenia $\sin^2 785^\circ + \sin^2 515^\circ - \operatorname{tg} 378^\circ \cdot \operatorname{tg} 288^\circ$ jest równa	
-2 ☐	0 ☐	2 ☐
	Wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg} 465^\circ}{\operatorname{tg} 285^\circ} + \sin^2 375^\circ + \sin^2 465^\circ$ jest równa	
-2 ☐	0 ☐	2 ☐

Ćwiczenie 7



Wiadomo, że $\sin x = \frac{1}{5}$ i $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Uporządkuj poniższe wyrażenia od tego, które ma najmniejszą wartość liczbową do tego, które ma największą wartość liczbową.

$$\operatorname{tg}(2\pi + x)$$



$$\cos(\pi + x)$$



$$\sin(\pi - x)$$



$$\operatorname{tg}(\pi - x)$$



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$



$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$



Ćwiczenie 8



Wykaż, że dla dowolnego kąta $x \neq k \cdot \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ tożsamością jest równość

$$\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)}}{1 - \operatorname{tg}^2(3\pi - x)} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2(4\pi - x)} - 1 \right) \cdot \operatorname{tg}(-5\pi + x) = 1$$

Ćwiczenie 9



Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{\cos^2(450^\circ - x)}{\sin^{-2}(x + 270^\circ) - 1} + \frac{\sin^2(x + 630^\circ)}{\cos^{-2}(270^\circ - x) - 1}$ dla $x \neq k \cdot 90^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie wzorów redukcyjnych i okresowości funkcji trygonometrycznych.

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
- 4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzory redukcyjne do obliczania wartości wyrażeń trygonometrycznych,
- stosuje wzory redukcyjne do dowodzenia twierdzeń.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- dyskusja;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.
2. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Wykorzystanie wzorów redukcyjnych i okresowości funkcji trygonometrycznych.”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kota i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Wykorzystanie wzorów redukcyjnych i okresowości funkcji trygonometrycznych.”.