Odległość punktu od prostej w układzie współrzędnych

Odległość punktu od prostej w układzie współrzędnych

Źródło: Christian Kaindl, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji poznasz wzór na odległość punktu o danych współrzędnych od prostej o danym równaniu umieszczonych w układzie współrzędnych. Nauczymy się też go stosować w najprostszych sytuacjach w geometrii analitycznej.

Twoje cele

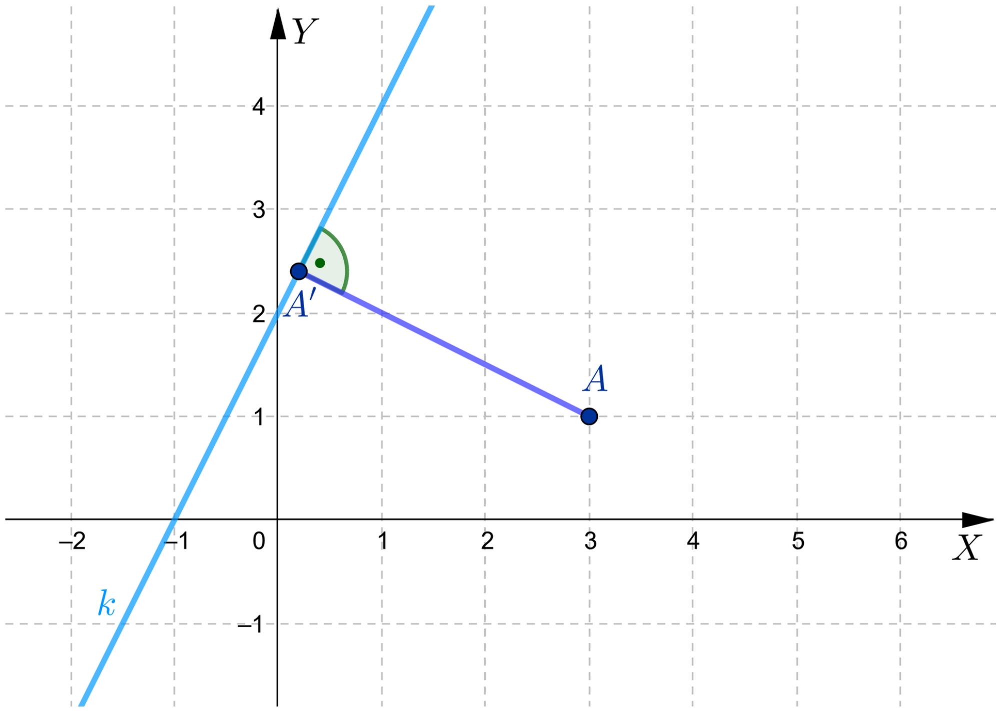
- Obliczysz odległość punktu od prostej w układzie współrzędnych.
- Wyznaczysz wartości parametrów, aby odległość punktu od prostej była równa zadanej z góry liczbie.

Przeczytaj

Zaczniemy od przykładu.

Przykład 1

Obliczymy odległość punktu $A=(3,\ 1)$ od prostej k o równaniu $y=2x+2$.



Przypomnijmy, że odległość punktu od prostej jest równa długości odcinka łączącego dany punkt z punktem na prostej, który jest do tej prostej prostopadły.

Zaczniemy od wyznaczenia współrzędnych punktu A', który należy do prostej k oraz odcinek AA' jest prostopadły do prostej k.

Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej k jest równy $-\frac{1}{2}$, zatem równanie prostej prostopadłej do prostej k ma postać

$y=-\frac{1}{2}x+b$

Ponieważ prosta ta przechodzi przez punkty $A=(3,\ 1)$, zatem współrzędne punktu A spełniają równanie $y=-\frac{1}{2}x+b$.

Ten fakt pozwala wyznaczyć wartość współczynnika b

$1=-\frac{1}{2}\cdot 3+b$

czyli $b=2,5$.

Zatem równanie prostej prostopadłej do prostej k przechodzącej przez punkt A to $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

Aby wyznaczyć współrzędne punktu wspólnego obu prostych wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y=2x+2 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases}$$

Wynika z niego równanie

$$2x+2=-0,5x+2,5$$

$$2,5x=0,5$$

$$x=0,2$$

Dla tak wyznaczonej wartości x wartość współrzędnej y jest równa $y=2\cdot 0,2+2=2,4$.

Zatem punkt A' ma współrzędne $(0,2;\ 2,4)$.

Teraz wystarczy wyznaczyć długość odcinka AA'. W tym celu możemy skorzystać ze wzoru na długość odcinka o danych współrzędnych jego końców:

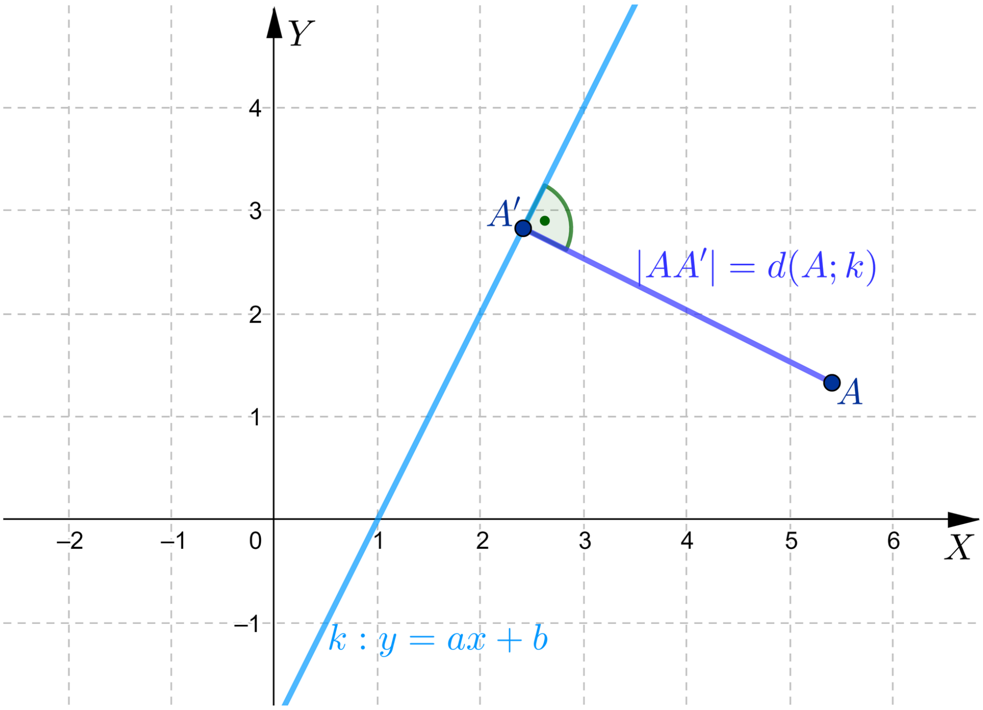
$$\left|AA^{'}\right|=\sqrt{\left(x_{A^{'}}-x_{A}\right)^{2}+\left(y_{A^{'}}-y_{A}\right)^{2}}=\sqrt{(0,2-3)^{2}+(2,4-1)^{2}}=$$

$$=\sqrt{2,8^{2}+1,4^{2}}=\sqrt{7,84+1,96}=\sqrt{9,8}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Zatem odległość punktu $A=(3,\ 1)$ od prostej o równaniu $y=2x+2$ jest równa $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

Przykład 2

Postępując analogicznie wyznaczymy wzór na odległość punktu od prostej o równaniu kierunkowym.



Rozważmy punkt A o współrzędnych $(x_0,\ y_0)$ oraz prostą o równaniu $y = ax + b$.

Wówczas współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do danej jest równy $-\frac{1}{a}$, zatem równanie tej prostej ma postać $y = -\frac{1}{a}x + B$.

Współczynnik B wyznaczymy wstawiając do powyższego równania współrzędne punktu A:

$y_0 = -\frac{1}{a}x_0 + B$

co oznacza, że:

$B = \frac{ay_0+x_0}{a}$

Zatem szukane równanie ma postać $y = -\frac{1}{a}x + \frac{ay_0+x_0}{a}$.

Aby wyznaczyć współrzędne punktu wspólnego obu prostych, wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = -\frac{1}{a}x + \frac{ay_0+x_0}{a} \end{cases}$$

Wynika z niego równanie

$ax + b = -\frac{1}{a}x + \frac{ay_0+x_0}{a}$, z którego można wyznaczyć x:

$\left(a + \frac{1}{a}\right)x = \frac{ay_0+x_0-ab}{a}$

$x = \frac{ay_0+x_0-ab}{a^2+1}$

Po podstawieniu wyznaczonej wartości x do równania $y = ax + b$ otrzymujemy

$$y = \frac{a^2y_0+ax_0+b}{a^2+1}$$

Zatem punkt wspólny A' obu prostych ma współrzędne

$$\left(\frac{ay_0+x_0-ab}{a^2+1},\ \frac{a^2y_0+ax_0+b}{a^2+1}\right)$$

Zatem długość odcinka AA' jest równa

$$\sqrt{\left(\frac{ay_0+x_0-ab}{a^2+1} - x_0\right)^2 + \left(\frac{a^2y_0+ax_0+b}{a^2+1} - y_0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ay_0-a^2x_0-ab}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{ax_0-y_0+b}{a^2+1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2(y_0-ax_0-b)^2+(y_0-ax_0-b)^2}{(a^2+1)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+1)(y_0-ax_0-b)^2}{(a^2+1)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(y_0-ax_0-b)^2}{a^2+1}} = \frac{|y_0-ax_0-b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Zatem odległość punktu $A = (x_0,\ y_0)$ od prostej o równaniu $k:\ y = ax + b$ wyraża się wzorem

$$d(A,\ k) = \frac{|ax_0-y_0+b|}{\sqrt{1+a^2}}$$

Przykład 3

Wyznaczymy odległość punktu $A = (-1,\ 3)$ od prostej k o równaniu $y = -2x - 1$.

Podstawiając dane z przykładu do powyższego wzoru otrzymujemy

$$d(A,\ k) = \frac{|-2\cdot(-1)-3-1|}{\sqrt{1+(-2)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Przykład 4

Wyznaczymy wartości parametru m tak, aby punkt o współrzędnych $(m,\ 2m)$ był odległy od prostej o równaniu $y = 3x - 1$ o 2.

Podstawiając dane z treści zadania do wzoru

$$d(A,\ k) = \frac{|\alpha x_0-y_0+b|}{\sqrt{1+a^2}}$$

otrzymujemy równanie:

$2 = \frac{|3m-2m-1|}{\sqrt{1+9}}$, które możemy kolejno przekształcić

$2\sqrt{10} = |m-1|$

$2\sqrt{10} = m-1$ lub $-2\sqrt{10} = m-1$

$m = 2\sqrt{10}+1$ lub $m = 1-2\sqrt{10}$

Zatem szukane punkty mają współrzędne

$\left(2\sqrt{10}+1,\ 4\sqrt{10}+2\right)$ lub $\left(1-2\sqrt{10},\ 2-4\sqrt{10}\right)$

Jeśli chcemy wyznaczyć odległość punktu $X=(x_0,\ y_0)$ od prostej m o równaniu $Ax+By+C=0$, gdzie $(A,\ B)\neq(0,\ 0)$, możemy posłużyć się wzorem wyprowadzonym powyżej.

Jeśli współczynnik B jest różny od zera, wówczas możemy przekształcić równanie prostej do postaci kierunkowej: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ oraz wykorzystać wzór na odległość punktu od prostej w postaci kierunkowej otrzymując wzór na odległość punktu od prostej opisanej równaniem ogólnym:

$d(X,\ m) = \frac{\left|\frac{A}{B}x_0+y_0+\frac{C}{B}\right|}{\sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)^2+1}}$, co po przekształceniu daje wzór:

$d(X,\ m) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (*)

Jeśli $B=0$, to prosta m ma równanie $x=-\frac{C}{A}$. Wówczas odległość punktu A od prostej m jest równa $\left|x_0+\frac{C}{A}\right|$. Zaś wzór (*) sprowadza się do postaci:

$d(X,\ m) = \frac{|Ax_0+0\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+0^2}} = \left|x_0+\frac{C}{A}\right|$

Oznacza to, że wzór (*) obejmuje również przypadek prostej równoległej do osi Y, zatem jest prawdziwy dla dowolnej prostej i dowolnego punktu umieszczonych w układzie współrzędnych.

Przykład 5

Obliczymy odległość punktu $A=(-2,\ -3)$ od prostej o równaniu $k:\ 5x-4y+1=0.$

Zgodnie z powyższym wzorem

$d(A,\ k) = \frac{|5\cdot(-2)-4\cdot(-3)+1|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}} = \frac{3}{\sqrt{41}} = \frac{3\sqrt{41}}{41}$

Słownik

wzór na odległość punktu od prostej o równaniu kierunkowym

odległość punktu $X=(x_0,\ y_0)$ od prostej k o równaniu $y=ax+b$ wyraża się wzorem

$d(X,\ k)=\frac{|\alpha x_0-y_0+b|}{\sqrt{a^2+1}}$

wzór na odległość punktu od prostej o równaniu ogólnym

odległość punktu $X=(x_0,\ y_0)$ od prostej k o równaniu $Ax+By+C=0$, gdzie $(A,\ B)\neq(0,\ 0)$, wyraża się wzorem

$d(X,\ k)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Aplet

Polecenie 1

Aplet przedstawia zastosowanie wzoru na odległość punktu od prostej. Korzystając z suwaków zmieniaj wartości współczynników A, B, C prostej k o równaniu $Ax + By + C = 0$ oraz położenie punktu X i obserwuj, jak zmienia się odległość punktu X od prostej k.

Zwróć uwagę, że wszystkie liczby podawane są z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Db7hx9Km6

Polecenie 2

Rozwiąż test. Możesz wykorzystać aplet. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Odległość punktu od prostej w układzie współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

5) oblicza odległość punktu od prostej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza odległość punktu od prostej w układzie współrzędnych,
- wyznacza wartości parametrów, aby odległość punktu od prostej była równa zadanej z góry liczbie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja panelowa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji w temacie: „Odległość punktu od prostej w układzie współrzędnych”.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Aplet”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania , omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inna parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Pojęcie odległości punktu od prostej

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Aplet” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Odległość punktu od prostej w układzie współrzędnych”.