Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z kontekstem realistycznym

Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z kontekstem realistycznym

Źródło: Andrew Mcelroy, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

W życiu codziennym wiele problemów można opisać za pomocą zależności pomiędzy dwiema niewiadomymi. W niektórych przypadkach dogłębna analiza tych problemów pozwala na zapisanie zależności pomiędzy wielkościami za pomocą wzoru funkcji liniowej oraz przedstawienie graficzne w postaci wykresu. W materiale przedstawimy różne zastosowania własności funkcji liniowej w zadaniach z kontekstem z życia codziennego. Opierając się na materiale teoretycznym oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Przeanalizujesz różne sytuacje, w których można wykorzystać własności funkcji liniowej.
- Zapiszesz wzór, określisz dziedzinę oraz naszkicujesz wykres odpowiedniej funkcji, która opisuje podany problem.
- Zastosujesz wzór odpowiedniej funkcji oraz jej wykres do rozwiązywania zadań związanych z życiem codziennym.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów z życia codziennego.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję funkcji liniowej.

Funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = ax + b$$

gdzie:

$a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcją liniową.

Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych. Wykresem funkcji liniowej jest prosta.

Funkcje liniowe mają szerokie zastosowanie do badania różnych współzależności. Pokażemy zastosowanie własności funkcji liniowych na przykładach zadań związanych z kontekstem realistycznym.

W wielu przypadkach dziedziną funkcji opisującej sytuacje rzeczywiste, będą tylko liczby dodatnie.

Przykład 1

Grupa sportowców biegnie na długim dystansie ze średnią prędkością $15\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Do mety pozostało im $30\ \text{km}$.

a) Wyznaczymy wzór opisujący odległość d tej grupy od mety, w zależności od czasu t.

b) Obliczymy, ile czasu potrzeba sportowcom, by dotrzeć do mety.

Rozwiązanie:

a) Wzór funkcji opisujący odległość d $[\text{km}]$ tej grupy od mety, w zależności od czasu t $[h]$ przedstawia się następująco:

$d(t) = 30 - 15 \cdot t$, gdzie $t \in \langle 0, 2 \rangle$.

b) Do wyznaczenia czasu, jaki jest potrzebny sportowcom, by dotrzeć do mety, wystarczy obliczyć miejsce zerowe funkcji, opisującej zależność odległości grupy sportowców od mety, przy określonym upływie czasu.

Zatem:

$0 = 30 - 15 \cdot t.$

Wobec tego $t = 2$.

Ponieważ $t = 2 \in \langle 0, 2 \rangle$, to czas potrzebny do dotarcia do mety wynosi 2 godziny.

Przykład 2

Firma organizuje imprezy weekendowe w hotelu. Każdy uczestnik płaci 500 zł. Kwota ta ma pokryć koszty pokoju, wyżywienia i oferowanych atrakcji. Hotel oczekuje zapłaty 6000 zł za korzystanie z atrakcji i 300 zł za każdego uczestnika.

a) Obliczymy, ilu uczestników powinno przyjechać na imprezę, aby przyniosła ona firmie zysk.

b) Naszkicujemy wykresy funkcji dochodu oraz funkcji kosztów, w zależności od liczby uczestników.

Rozwiązanie:

a) Niech n oznacza liczbę uczestników ($n \geq 0$). Zapiszemy wzorami dwie funkcje: dochodu $d(n)$ i kosztu $k(n)$.

Wówczas:

$d(n) = 500n$,

$k(n) = 6000 + 300n$.

Dodatkowo możemy zapisać funkcję zysku, która wyraża się wzorem:

$z(n) = d(n) - k(n)$.

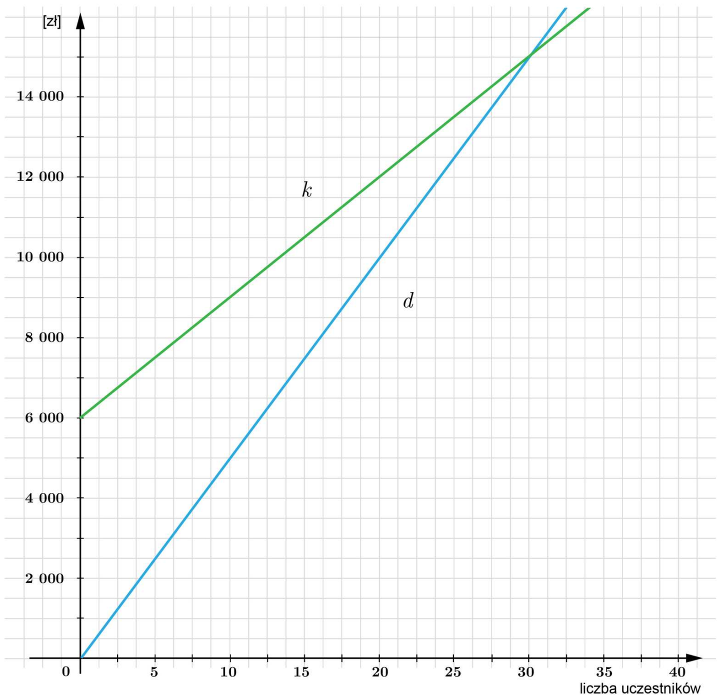
Wyznaczymy, przy jakiej liczbie uczestników koszty imprezy są równe dochodom.

Wobec tego $d(n) = k(n)$, gdy

$500n = 6000 + 300n$.

Zatem $n = 30$, czyli dla liczby uczestników większej od 30 dochody firmy będą większe od kosztów (czyli impreza przyniesie zysk).

b) Wykresy zależności funkcji dochodu oraz funkcji kosztu od liczby uczestników przedstawiają się następująco:



Przykład 3

Szkoła ma do wyboru dwie opcje korzystania z usług kserograficznych:

1. Wypożyczenie sprzętu za 1400 zł rocznie i $0,20$ zł za kopię każdej strony.
2. Zakup sprzętu za 2200 zł płatne jednorazowo i $0,18$ zł za kopię każdej strony.

a) Obliczymy, która z opcji jest bardziej opłacalna dla szkoły przy rocznym użytkowaniu na poziomie 10000 stron.

b) Wyznaczymy, jaki będzie koszt przy każdej z opcji, jeżeli rocznie szkoła wykonuje 12000 kopii.

c) Sprawdzimy, dla jakiej liczby stron koszty użytkowania w obu ofertach są równe.

Rozwiązanie:

Zapiszemy za pomocą wzorów funkcje f_1 i f_2, które przedstawiają całkowity koszt korzystania z usług kserograficznych odpowiednio w pierwszej i drugiej opcji.

Niech x oznacza liczbę kopii ($x \geq 0$). Wówczas:

$f_1(x) = 1400 + 0,20x$,

$f_2(x) = 2200 + 0,18x$.

a) Jeżeli $x = 10000$, to:

$f_1(10000) = 1400 + 0,20 \cdot 10000 = 3400$,

$f_2(10000) = 2200 + 0,18 \cdot 10000 = 4000$.

b) Jeżeli $x = 12000$, to:

$f_1(12000) = 1400 + 0,20 \cdot 12000 = 3800$,

$f_2(12000) = 2200 + 0,18 \cdot 12000 = 4360$.

c) Do wyznaczenia liczby kopii, przy której koszty w obu ofertach są równe, rozwiązujemy równanie:

$f_1(x) = f_2(x)$

$1400 + 0,20x = 2200 + 0,18x$.

Ponieważ $x \geq 0$, zatem $x = 40000$.

Koszty przy obu ofertach są równe, gdy wykona się 40000 kopii.

Przykład 4

Koszt eksploatacji samochodu jest powiązany z liczbą przejechanych kilometrów:

- jeżeli samochód przejedzie $5000\ \text{km}$, to koszt wynosi 5150 zł,
- jeżeli samochód przejedzie $2000\ \text{km}$, to koszt wynosi 2060 zł.

a) Wyznaczymy wzór opisujący zależność kosztu rocznej eksploatacji samochodu od liczby przejechanych kilometrów.

b) Naszkicujemy wykres zależności kosztu eksploatacji samochodu od liczby przejechanych kilometrów.

c) Obliczymy koszt eksploatacji samochodu, który przejechał $20000\ \text{km}$.

Rozwiązanie:

a) Oznaczmy przez x liczbę przejechanych kilometrów ($x \geq 0$).

Niech $f(x) = ax + b$ będzie funkcją opisującą omawianą zależność.

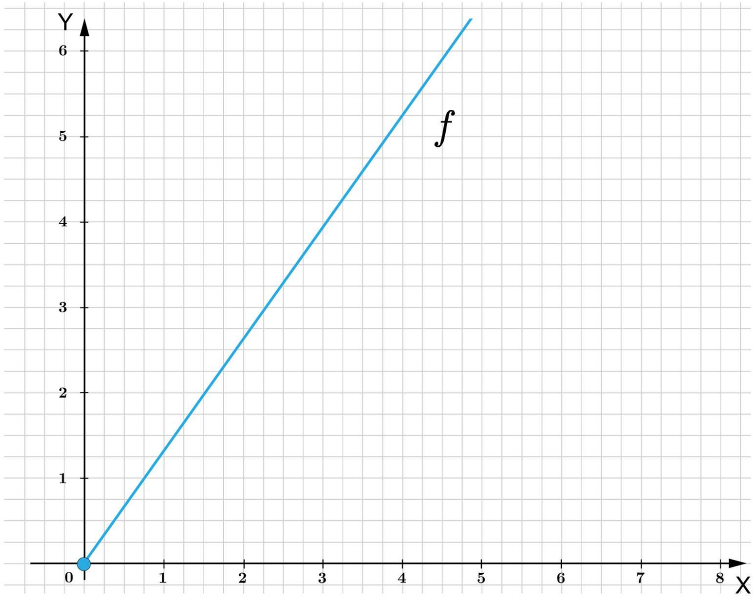
Do wyznaczenia wartości a i b rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2060 = 2000 \cdot a + b \\ 5150 = 5000 \cdot a + b \end{cases}$$

Zatem $a = 1,03$ i $b = 0$.

Funkcja wyraża się wzorem $f(x) = 1,3 \cdot x$.

b) Wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = 1,3 \cdot x$ dla $x \geq 0$ przedstawia się następująco:



c) Obliczamy:

$f(20000) = 1,03 \cdot 20000 = 20600.$

Przykład 5

Temperaturę wyrażoną w stopniach Celsjusza $[^\circ C]$ przelicza się na temperaturę wyrażoną w stopniach Fahrenheita $[^\circ F]$ według wzoru $[^\circ F] = [^\circ C] \cdot \frac{9}{5} + 32$, a temperaturę wyrażoną w stopniach Celsjusza $[^\circ C]$ przelicza się na temperaturę wyrażoną w Kelvinach $[^\circ K]$ według wzoru $[^\circ K] = [^\circ C] + 273,15$. Wyznaczymy wzór zależności pomiędzy temperaturą wyrażoną w stopniach Fahrenheita, a temepraturą wyrażoną w Kelvinach.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że:

$[^\circ C] = \frac{5}{9} \cdot ([^\circ F] - 32)$

oraz

$[^\circ C] = [^\circ K] - 273,15$

Zatem prawdziwa jest równość:

$[^\circ K] - 273,15 = \frac{5}{9} \cdot ([^\circ F] - 32)$

Wobec tego:

$[^{\circ}K] = \frac{5}{9} \cdot ([^{\circ}F] - 32) + 273,15$

Otrzymany wzór przedstawia zależność pomiędzy temperaturą wyrażoną w stopniach Fahrenheita, a temepraturą wyrażoną w Kelvinach.

Przykład 6

Funkcja f określa miarę kąta (w stopniach) między wskazówką godzinową a wskazówką minutową zegara w zależności od czasu t (w minutach), między północą a godziną pierwszą.

a) Wyznaczymy wzór funkcji f.

b) Podamy miarę kąta między wskazówkami zegara o godzinie $0:20$.

Rozwiązanie:

a) Ponieważ $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$, zatem po upływie 1 min wskazówka minutowa zegara wyznaczy kąt o mierze 6°.

Wskazówka godzinowa zegara po upływie 1 min wyznaczy kąt o mierze $0,5^{\circ}$.

Czyli po upływie $1\ min$ kąt między wskazówką godzinową, a wskazówką minutową zegara będzie miał miarę $5,5^{\circ}$.

Wobec tego wzór funkcji f przedstawia się następująco:

$f(t) = 5,5^{\circ} \cdot t$, gdzie $t \in \langle 0,60 \rangle$.

b) Obliczamy:

$f(20) = 5,5^{\circ} \cdot 20 = 110^{\circ}$

Wobec tego miara kąta wyznaczonego przez wskazówki minutową i godzinową zegara o godz. $0:20$ wynosi 110°.

Słownik

funkcja liniowa

funkcja określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = ax + b$$

gdzie:
$a, b \in \mathbb{R}$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Obejrzyj galerię zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Polecenie 2

Wiadomo, że pojemność baku samochodowego wynosi 50 litrów. Na przejechanie $100\ \mathrm{km}$ samochód zużywa 8 litrów paliwa.

Podaj wzór funkcji, która opisuje zależność pomiędzy ilością paliwa, które pozostało w baku samochodu, a liczbą przejechanych kilometrów, a następnie oblicz:

a) ile kilometrów pokona samochód, gdy bak jest pełny,

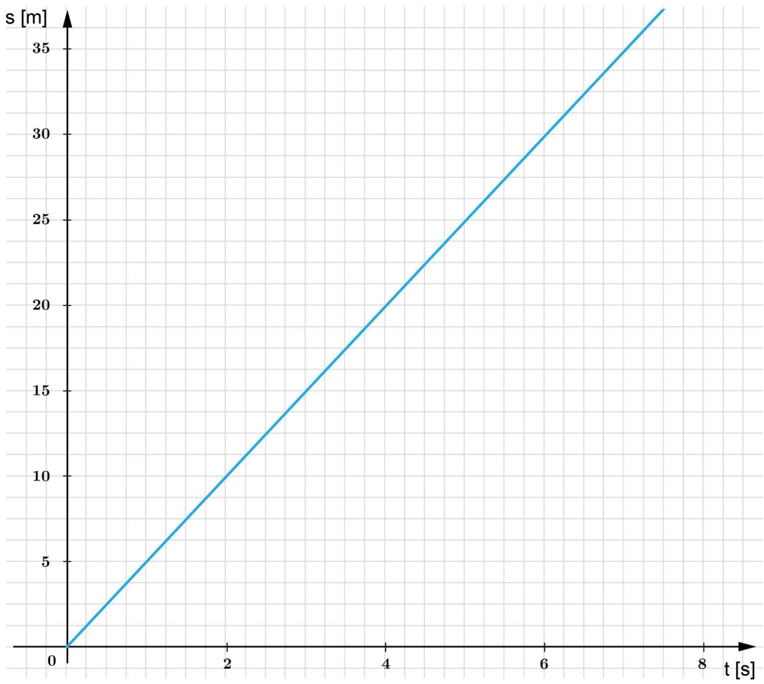
b) ile litrów paliwa pozostanie w baku, gdy samochód przebędzie drogę długości $20\ \mathrm{km}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Funkcja określona wzorem $y = 1800 + 16x$ opisuje koszt (w złotych) produkcji zabawek w pewnej firmie. Jedna zabawka kosztuje 16 zł, a x oznacza liczbę wyprodukowanych zabawek.

Ćwiczenie 4

Wynajęcie sali treningowej na godzinę od poniedziałku do piątku kosztuje 100 zł i 4 zł za każdą osobę, a w weekendy 60 zł i 8 zł za każdą osobę.

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

W zbiorniku znajdowało się 400 litrów wody. Po odkręceniu kurka odpływowego w ciągu każdej minuty wypływa 25 litrów wody.

Ćwiczenie 7

Funkcja podaży pewnego towaru (ilości towaru, jakie producenci dostarczają na rynek) jest określona wzorem $f(x) = -x + 10$, a funkcja popytu tego towaru (ilości towaru, które nabywcy kupują po określonej cenie) wyraża się wzorem $g(x) = x + 4$, gdzie $x \geq 0$.

a) Wyznacz punkt równowagi rynkowej (ilość danego towaru, przy jakiej popyt jest równy podaży).

b) Określ, przy jakiej liczbie sprzedanego towaru podaż jest większa od popytu.

c) Naszkicuj wykresy funkcji popytu i podaży.

Ćwiczenie 8

Zależność między stopniami Celsjusza (T_C) a Kelwinami (T_K) w układzie SI opisuje wzór $T_K = T_C + 273,15$.

a) Naszkicuj wykres zależności między temperaturą wyrażoną w stopniach Celsjusza i Kelwinach.

b) Wyraź temperaturę $40^\circ\mathrm{C}$ w Kelwinach.

c) Wyraź temperaturę $100^\circ\mathrm{K}$ w Celsjuszach.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z kontekstem realistycznym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- analizuje różne sytuacje, które można przedstawić za pomocą funkcji liniowej;
- zapisuje wzór, określa dziedzinę oraz szkicuje wykres funkcji, która opisuje podany problem;
- stosuje wzór funkcji liniowej oraz jej wykres do rozwiązywania zadań z kontekstem realistycznym;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów z życia codziennego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z kontekstem realistycznym”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 w sekcji „Sprawdź się”. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie ma forum klasy.

5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 w sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie w parach opracowują po trzy przykłady z rozwiązaniami dotyczące zastosowania wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z kontekstem realistycznym.

Materiały pomocnicze:

- Przykłady zastosowania funkcji liniowej. Część I
- Przykłady zastosowania funkcji liniowej. Część II

Wskazówki metodyczne:

- „Galerię zdjęć interaktywnych” można wykorzystać jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu w zakresie zastosowania wiadomości o funkcji liniowej w problemach z kontekstem realistycznym.

- „Galerię zdjęć interaktywnych” można wykorzystać w realizacji tematu „Własności funkcji liniowej”.