Rozwiązywanie równań z funkcją tangens

Rozwiązywanie równań z funkcją tangens

Źródło: hert niks, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Na poprzedniej lekcji dowiedziałeś się, jak rozwiązywań proste równania typu $\operatorname{tg} x = a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. Na tej lekcji dowiesz się, jak sprowadzić bardziej skomplikowane równania do postaci $\operatorname{tg} x = a$. W tym celu wykorzystamy poznane przez Ciebie tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ oraz $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Twoje cele

- Nauczysz się sprowadzać równania do postaci $\operatorname{tg} x = a$.
- Dowiesz się, jak wykorzystać podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania równań.

Przeczytaj

Nauczyliśmy się rozwiązywać równania postaci $\operatorname{tg} x = a$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Na tej lekcji każde równanie, o ile to tylko możliwe, będziemy starali się sprowadzić do równania postaci $\operatorname{tg} x = a$.

Pamiętajmy o kilku charakterystycznych elementach rozwiązywania równań:

1. Sprawdzamy dziedzinę równania. Najczęściej wypisujemy założenia związane z dzieleniem i pierwiastkowaniem: mianownik ułamka musi być różny od 0 i wyrażenie pod pierwiastkiem stopnia parzystego musi być nieujemne.
2. Sprowadzamy równanie do wartości jednej funkcji trygonometrycznej.
3. Często stosujemy podstawienie $t = \sin x$ lub $t = \cos x$ lub $t = \operatorname{tg} x$.

Przypomnijmy jeszcze, jak będziemy rozwiązywać równania typu $\operatorname{tg} x = a$.

Twierdzenie: o rozwiązywaniu równania $\operatorname{tg} x = a$

Algorytm szukania rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = a$:

Znajdujemy jedno rozwiązanie x_0 takie, że $\operatorname{tg} x_0 = a$. Zapisujemy wszystkie rozwiązaania równania $\operatorname{tg} x = a$: $x = x_0 + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przedstawmy kilka charakterystycznych przykładów równań trygonometrycznych.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie: $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x - 1} = 0$.

Rozwiązanie:

Zapiszmy założenia: $\cos x \neq 1$, $\cos x \neq 0$.

Zatem: $x \neq 2k\pi$ i $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Aby lewa strona równania była równa 0, licznik musi być równy 0:

$\operatorname{tg} x = 0$, gdy $x = \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Po uwzględnieniu założeń otrzymujemy odpowiedź: $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie: $\sin x = \cos x$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że funkcje $y = \sin x$ i $y = \cos x$ nie mogą jednocześnie przyjmować wartości 0. Zatem w tym równaniu $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$.

Wobec tego możemy równanie $\sin x = \cos x$ podzielić stronami przez $\cos x$.
Otrzymujemy wówczas równoważne mu równanie:

$\operatorname{tg} x = 1$.

Stąd otrzymujemy odpowiedź: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie: $\sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos 2x = 0$.

Rozwiązanie:

Zapiszmy równanie w postaci równoważnej: $\sin 2x \cos 3x = -\sin 3x \cos 2x$.

Zauważmy, że funkcje $y = \sin x$ i $y = \cos x$ nie mogą jednocześnie przyjmować wartości 0. Zatem w tym równaniu nie może zdarzyć się, aby jednocześnie $\sin 2x = 0$ i $\cos 2x = 0$ oraz nie może zdarzyć się, aby jednocześnie $\sin 3x = 0$ i $\cos 3x = 0$. Sprawdźmy przypadek, gdy jednocześnie $\cos 2x = 0$ i $\cos 3x = 0$.

Wówczas $\cos 2x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zatem $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$\cos 3x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Zatem $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Okazuje się, że warunki $\cos 2x = 0$ i $\cos 3x = 0$ nie mogą zajść jednocześnie. Możemy wobec tego przyjąć, że $\cos 2x \neq 0$ i $\cos 3x \neq 0$.

Podzielmy stronami równanie $\sin 2x \cos 3x = -\sin 3x \cos 2x$ przez wyrażenie: $\cos 2x \cos 3x$.

Otrzymujemy: $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} 3x$, czyli na podstawie nieparzystości funkcji tangens $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(-3x)$.

Korzystając z metody porównywania dla równań z tangensem zapiszemy rozwiązania:

$2x = -3x + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,

czyli

$5x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Odpowiedź: $x = \frac{k\pi}{5}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie: $\sin^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

Rozwiązanie:

Rozważmy przypadek, gdy $\cos x = 0$. Wóczas równanie ma postać $\sin^2 x = 0$, czyli $\sin x = 0$.

Zauważmy, że funkcje $y = \sin x$ i $y = \cos x$ nie mogą jednocześnie przyjmować wartości 0, czyli te argumenty x, dla których $\cos x = 0$ nie spełniają równania.

Zatem możemy przyjąć, że $\cos x \neq 0$ i równanie
$\sin^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ możemy podzielić stronami przez $\cos^2 x$.
Otrzymujemy wówczas równanie postaci:

$$\operatorname{tg}^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$$

Podstawmy: $t = \operatorname{tg} x$.

Wówczas otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$t^2 - \left(\sqrt{3}+1\right)t + \sqrt{3} = 0.$$

Obliczamy:

$$\Delta = \left(-\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^2 - 4\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right)^2.$$

Wobec tego: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3} - 1$.

Rozwiązaniami równania $t^2 - \left(\sqrt{3}+1\right)t + \sqrt{3} = 0$ są:

$t = \sqrt{3}$ lub $t = 1$,

czyli: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = 1$.

Rozwiązaniami równania $\sin^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ są zatem

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zwróćmy uwagę na to, że w przykładzie 3 i 4 zastosowaliśmy technikę sprowadzenia równania przez podzielenie przez $\cos x$ lub $\cos^2 x$ do postaci równania z funkcją tangens. To dosyć częsty motyw w zadaniach, w których występują tylko funkcje sinus i cosinus. Jednakże należy zawsze pamiętać o rozważeniu przypadku: $\cos x = 0$.

Słownik

> **metoda porównywania dla równań z tangensem**
>
> równanie $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym filmem, a następnie wykonaj kolejne polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DtkhY569C

Film nawiązujący do treści materiału dotyczący rozwiązywania równań z tangensem.

Polecenie 2

Wskaż odpowiedź, która uwzględnia wszystkie rozwiązania równania $3\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$.

- $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
- $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Polecenie 3

Rozwiąż równanie: $\operatorname{tg}^3 x + 4\operatorname{tg}^2 x + 7\operatorname{tg} x + 4 = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wskaż wszystkie rozwiązania równania $\frac{\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1}{1-\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}=1$.

- $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
- $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
- $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
- $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
- $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
- $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
- $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
- $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$

Ćwiczenie 2

Połącz w pary równania, które mają ten sam zbiór rozwiązań.

$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$	$\operatorname{tg} x=0$
$\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$	$\operatorname{tg} 2x=0$
$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$
$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$	$\operatorname{tg}^2 x=1$

Ćwiczenie 3

Wskaż wszystkie rozwiązania równania: $\operatorname{tg}^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)-3=0$.

- $x=\frac{k\pi}{9}$ lub $x=\frac{4\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
- $x=\frac{4\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$ lub $x=-\frac{4\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
- $x=\frac{k\pi}{3}$ lub $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
- $x=\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$ lub $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$

Ćwiczenie 4

Każdemu równaniu przypisujemy najmniejsze rozwiązanie w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ustaw równania od najmniejszej do największej przypisanej liczby.

$-\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg}(-8x)$

$\operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} 7x = 0$

$\operatorname{tg} 12x - \operatorname{tg} 2x = 0$

$\operatorname{tg} 4x = -\operatorname{tg} 5x$

Ćwiczenie 5

Wszystkie rozwiązania równania ______ są postaci ______, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{k\pi}{4}$ | $\sin 2x \cos 5x = \sin 5x \cos 2x$ | $x = \frac{k\pi}{7}$ | $x = k\pi$ | $x = \frac{k\pi}{6}$ | $x = \frac{k\pi}{5}$ | $\sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos 2x = 0$

Ćwiczenie 6

Wstaw w puste pole odpowiednią, nieujemną liczbę całkowitą.

Równanie $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 6 \operatorname{tg} x = 0$ ma w przedziale $\left\langle 0, \frac{5\pi}{2}\right)$ ______ rozwiązań.

Ćwiczenie 7

Rozwiąż równanie: $\operatorname{tg}^4 3x + \operatorname{tg}^2 3x - 12 = 0$.

Ćwiczenie 8

Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ równanie

$$\left|7\operatorname{tg}\left(3x-1\right)\right| = -a^2 + 6a - 8$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie równań z funkcją tangens

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony

Uczeń:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprowadza równania do postaci $\operatorname{tg} x = a$;
- wykorzystuje podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania równań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja za i przeciw;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Rozwiązywanie równań z funkcją tangens”, a następnie określa cele i kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Film samouczek” - „Obejrzyj poniższy film, a następnie wykonaj kolejne polecenia.” - prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Rozwiązywanie równań z funkcją tangens”).

Materiały pomocnicze:

- Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Rozwiązywanie równań z funkcją tangens”.