



Wykorzystanie monotoniczności funkcji wykładniczej w zadaniach arytmetycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykorzystanie monotoniczności funkcji wykładniczej w zadaniach arytmetycznych

Źródło: Wald Nob, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Monotoniczność funkcji wykładniczej pozwala na wyjaśnienie wielu zjawisk związanych z życiem codziennym. Funkcję wykładniczą wykorzystujemy do opisu wielkości, które w stałym tempie się zwiększają lub zmniejszają. Bazując na zdobytej wiedzy, wykorzystamy monotoniczność funkcji wykładniczej do rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.

Twoje cele

- Rozpoznaś funkcje wykładnicze malejące i rosnące.
- Wykorzystasz własności funkcji wykładniczej do porównywania wartości potęg.
- Nauczysz się rozwiązywać zadania arytmetyczne dotyczące funkcji wykładniczej.

Przeczytaj

Funkcję wykładniczą zapisujemy w postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$.

W materiale omówimy monotoniczność funkcji wykładniczej. Przypomnimy pozostałe własności tej funkcji, które będziemy wykorzystywać w rozwiązywaniu przykładów oraz ćwiczeń.

Własności funkcji wykładniczej:

- dziedziną funkcji jest zbiór $x \in \mathbb{R}$,
- zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $y \in (0, \infty)$,
- wykresem tej funkcji jest krzywa, która przechodzi przez punkt $(0, 1)$,
- funkcja wykładnicza nie ma miejsc zerowych,
- asymptotą jej wykresu jest prosta $y = 0$,
- jest różnowartościowa,
- jest **monotoniczna**.

Monotoniczność funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ zależy od współczynnika a . Jeżeli:

- $a \in (0, 1)$, to funkcja jest malejąca,
- $a \in (1, \infty)$, to funkcja jest rosnąca.

Przykład 1

Które z wymienionych funkcji są malejące, a które rosnące?

$$f_1(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x, f_2(x) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^x, f_3(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x, f_4(x) = (\pi - 3)^x, f_5(x) = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^x.$$

Funkcje malejące to: $f_1(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$.

Funkcje rosnące to: $f_2(x)$, $f_5(x)$.

Ważne!

Wykorzystując monotoniczność funkcji wykładniczej, możemy uporządkować skończony zbiór potęg.

Przykład 2

Uporządkujmy podane liczby w kolejności rosnącej:

$$32^8, 16^9, 256^4, \left(\frac{1}{64}\right)^{-3}.$$

Zauważmy, że każdą liczbę można zapisać w postaci potęgi liczby 2.

Otrzymujemy, że:

$$32^8 = 2^{40}$$

$$16^9 = 2^{36}$$

$$256^4 = 2^{32}$$

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{-3} = 2^{18}.$$

Otrzymane liczby to wartości funkcji wykładniczej $f(x) = 2^x$.

Funkcja ta jest rosnąca, zatem z jej monotoniczności wynika, że:

$$2^{18} < 2^{32} < 2^{36} < 2^{40}.$$

Odpowiadające im wartości to:

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{-3} < 256^4 < 16^9 < 32^8.$$

Ważne!

Dla $f(x) = a^x$, $a \in (1, \infty)$, $x_1, x_2 \in D_f$ oraz $x_1 < x_2$ zachodzi następująca własność:

$$a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Dowód:

Założmy, że $x_1 < x_2$, zatem $x_1 - x_2 < 0$.

Ponieważ funkcja f jest rosnąca, zatem $a^{x_1 - x_2} < a^0$.

Po przekształceniu tej nierówności mamy, że $a^{x_1 - x_2} < 1$.

Korzystając z własności potęg, nierówność możemy zapisać w postaci $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} < 1$.

Wiadomo, że $a^x > 0$, zatem po pomnożeniu obu stron nierówności $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} < 1$ przez a^{x_2} , otrzymujemy, że $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Przykład 3

Uporządkujmy podane liczby rosnąco:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5, \left(\frac{9}{4}\right)^{-6}, \left(\frac{8}{27}\right)^5, \left(\frac{3}{2}\right)^{-10}.$$

Zauważmy, że każdą z liczb można zapisać w postaci potęgi liczby $\frac{2}{3}$.

Otrzymujemy, że:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12},$$

$$\left(\frac{8}{27}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{15},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}.$$

Otrzymane liczby to wartości funkcji wykładniczej $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Funkcja ta jest malejąca, zatem z jej monotoniczności wynika, że:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{15} < \left(\frac{2}{3}\right)^{12} < \left(\frac{2}{3}\right)^{10} < \left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

Odpowiadające im wartości to:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^5 < \left(\frac{9}{4}\right)^{-6} < \left(\frac{3}{2}\right)^{-10} < \left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

Ważne!

Dla $f(x) = a^x$, $a \in (0, 1)$, $x_1, x_2 \in D_f$ oraz $x_1 < x_2$ zachodzi następująca własność:

$$a^{x_1} > a^{x_2}.$$

Dowód:

Założmy, że $x_1 < x_2$, zatem $x_1 - x_2 < 0$.

Ponieważ funkcja f jest malejąca, zatem $a^{x_1 - x_2} > a^0$.

Po przekształceniu tej nierówności mamy, że $a^{x_1 - x_2} > 1$.

Korzystając z własności potęg, nierówność możemy zapisać w postaci $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1$.

Wiadomo, że $a^x > 0$, zatem po pomnożeniu obu stron nierówności $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1$ przez a^{x_2} , otrzymujemy, że $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Przykład 4

Wyznamy zbiór wartości funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, jeżeli jej dziedziną jest przedział $\langle -3, 4 \rangle$.

Ponieważ funkcja jest wykładnicza i malejąca, zatem wystarczy obliczyć wartości funkcji na końcach podanego przedziału.

$$f(-3) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125,$$

$$f(4) = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}.$$

Zatem zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle \frac{1}{625}, 125 \rangle$.

Przykład 5

Wyznamy, dla jakich argumentów funkcja $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ przyjmuje wartości z przedziału $\langle \frac{27}{64}, \frac{16}{9} \rangle$.

Ponieważ funkcja jest wykładnicza i malejąca, zatem wystarczy obliczyć dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości podane na końcach przedziału.

Rozwiązujemy równania:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{27}{64}, \text{ zatem } x = 3,$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{16}{9}, \text{ zatem } x = -2.$$

Funkcja przyjmuje wartości z przedziału $\langle \frac{27}{64}, \frac{16}{9} \rangle$ dla argumentów należących do przedziału $\langle -2, 3 \rangle$.

Monotoniczność funkcji wykładniczej wykorzystuje się do rozwiązywania nierówności wykładniczych.

Przykład 6

Wyznamy, dla jakich argumentów funkcja $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x+2}$ przyjmuje wartości nie większe niż $\frac{25}{4}$.

W celu wyznaczenia zbioru argumentów wystarczy rozwiązać nierówność: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} \leq \frac{25}{4}$.

Po przekształceniu obu stron nierówności do tej samej podstawy otrzymujemy:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}.$$

Z faktu, że funkcja wykładnicza dla $a \in (0, 1)$ jest malejąca zachodzi nierówność: $x + 2 \geq -2$, czyli $x \geq -4$.

Zatem $x \in \langle -4, \infty \rangle$.

Słownik

monotoniczność funkcji wykładniczej

$f(x) = a^x$ jest malejąca dla $a \in (0, 1)$, rosnąca dla $a \in (1, \infty)$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem, a następnie wykonaj polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1AE3IlkX>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wykorzystania monotoniczności funkcji wykładniczej w zadaniach arytmetycznych.

Polecenie 2

Ułóż podane liczby malejąco: 5^{-4} , $\left(\frac{1}{25}\right)^{-3}$, 125^{-4} , $\left(\sqrt{5}\right)^8$. Przedstaw rozwiązanie na dwa sposoby.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uporządkuj liczby w kolejności malejącej.

$$9^8$$



$$27^{-4}$$



$$3^{12}$$



$$\left(\frac{1}{81}\right)^{-5}$$



Ćwiczenie 2



Pogrupuj liczby zgodnie z opisem.

Liczby większe od 2^8 :

$$32^{-5}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$$

$$4^7$$

$$16^3$$

$$32^3$$

Liczby mniejsze od 2^8 :

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Funkcja określona wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^x$:

☐ jest malejąca

☐ nie jest monotoniczna

☐ jest rosnąca

Ćwiczenie 4



Pogrupuj funkcje zgodnie z podanym opisem.

Funkcje malejące:

$$f(x) = (\sqrt{5} - 2)^x$$

$$f(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)^x$$

Funkcje rosnące:

$$f(x) = (\sqrt{3} - 1)^x$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$$

$$f(x) = \pi^x$$

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^x$$

Ćwiczenie 5



Dana jest funkcja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Połącz podzbiór dziedziny tej funkcji z odpowiadającym mu podzbiorem zbioru wartości.

$\langle 2, 3 \rangle$

$\langle \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \rangle$

$\langle -3, -2 \rangle$

$\langle 4, 8 \rangle$

$\langle -5, -1 \rangle$

$\langle 2, 32 \rangle$

$\langle 1, 5 \rangle$

$\langle \frac{1}{32}, \frac{1}{2} \rangle$

Ćwiczenie 6



Przeciągnij liczby w odpowiednie miejsca.

Dane są trzy liczby: 2^{-4} , $(\frac{1}{4})^{-3}$, 16^{-3} .

Jeżeli ułożymy te liczby rosnąco, wówczas pierwszą liczbą będzie , zaś ostatnią .

Ćwiczenie 7



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Funkcja określona wzorem $f(x) = (\frac{2}{5})^{x+3}$ przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja $g(x) = (\frac{25}{4})^{-x+3}$ dla argumentów:

☐ $x > 9$

☐ całkowitych ujemnych

☐ $x < 9$

Ćwiczenie 8



Uzupełnij zdania.

Do wykresu funkcji $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ należy punkt o współrzędnych $(-3, \text{ })$.

Wartość funkcji dla argumentu -1 wynosi . Wartości tej funkcji są mniejsze od 16 dla argumentów większych od .

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie monotoniczności funkcji wykładniczej w zadaniach arytmetycznych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- porządkuje skończony zbiór potęg,
- wykorzystuje własności funkcji wykładniczej w zadaniach arytmetycznych,
- znajduje argumenty, dla których wartości funkcji wykładniczej są mniejsze lub większe od podanej liczby.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- ćwiczeń przedmiotowych;
- z użyciem komputera;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Film samouczek” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Wykorzystanie monotoniczności funkcji wykładniczej w zadaniach arytmetycznych”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się z materiałem w sekcji „Film samouczek”. Wykonują zawarte w tej części polecenia.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie sprawdzają swoje rozwiązania z innymi uczniami, wyjaśniają wspólnie z klasą wątpliwości.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

[Funkcja wykładnicza i jej własności. Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Film samouczek” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące porządkowania zbioru liczb, z wykorzystaniem monotoniczności funkcji wykładniczej.