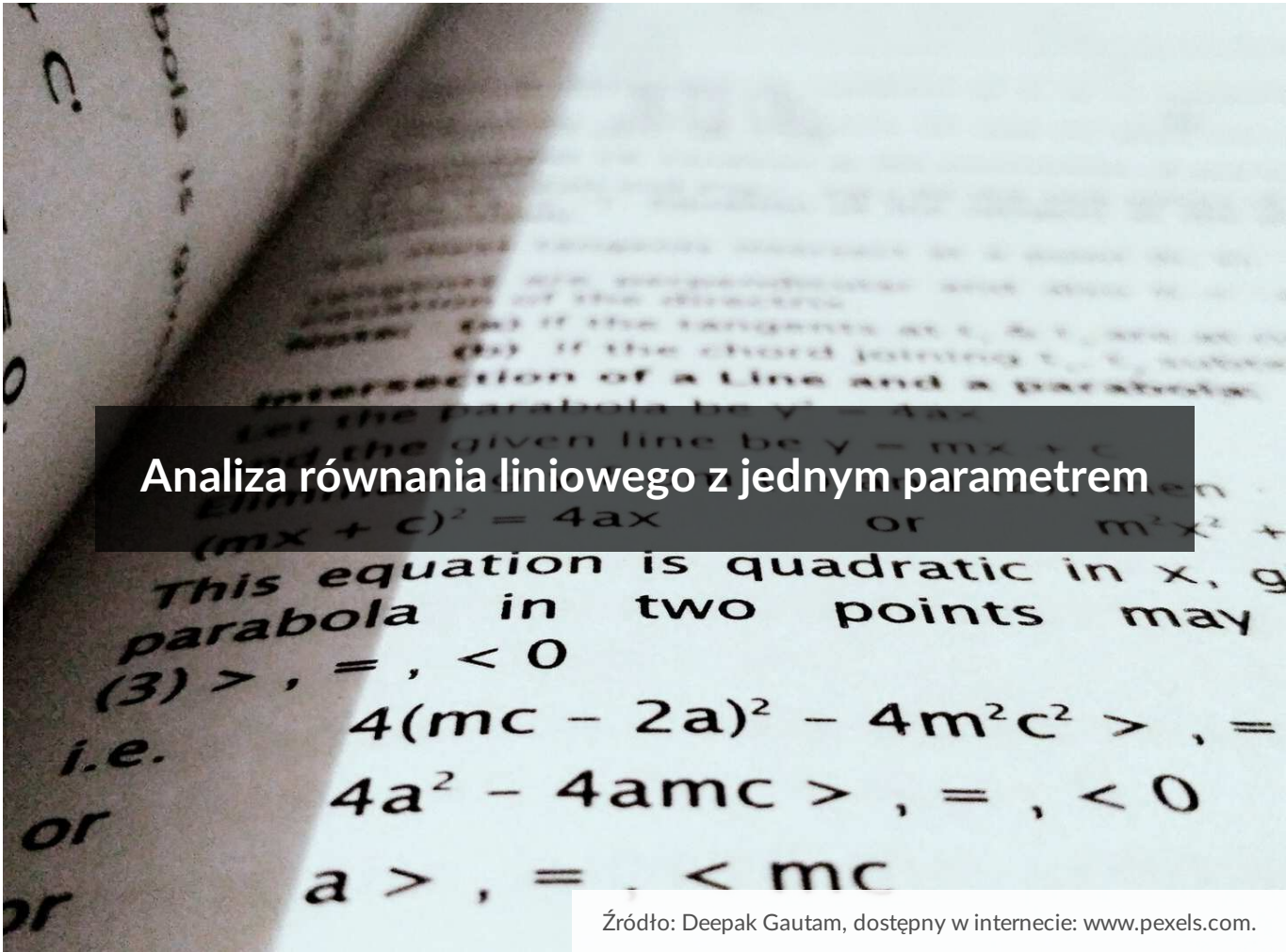




Analiza równania liniowego z jednym parametrem

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Analiza równania liniowego z jednym parametrem

Źródło: Deepak Gautam, dostępny w internecie: www.pexels.com.

W tym materiale zajmiemy się analizą równania liniowego z jednym parametrem. Analiza ta będzie polegała na rozwiązaniu równania z niewiadomą x , np.:

$$a \cdot (x - 3) = a + 6,$$

gdzie:

a – jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Liczbę a nazywamy **parametrem równania**.

Twoim zadaniem będzie zbadanie liczby rozwiązań równania w zależności od parametru a , czyli podaniu takich wartości liczby a , dla których równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, dla których jest sprzeczne i kiedy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Twoje cele

- Znajdziesz wszystkie takie wartości rzeczywiste parametru, aby dana liczba była rozwiązaniem równania.
- Zbadasz liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru występującego w równaniu.

Przeczytaj

Przykład 1

Znajdziemy wszystkie rzeczywiste wartości parametru p , dla których rozwiązaniem równania $2p^2x + 4 = p + x$ z niewiadomą x będzie liczba 4.

W tym celu podstawimy do równania w miejsce x liczbę 4.

$$2p^2 \cdot 4 + 4 = p + 4$$

$$8p^2 + 4 = p + 4$$

$$8p^2 - p = 0$$

$$p \cdot (8p - 1) = 0$$

$$p = 0 \text{ lub } 8p - 1 = 0$$

$$p = 0 \text{ lub } p = \frac{1}{8}$$

Aby rozwiązaniem równania $2p^2x + 4 = p + x$ z niewiadomą x była liczba 4, to $p \in \{0, \frac{1}{8}\}$.

Przykład 2

Dla jakich wartości parametru a **równanie liniowe** $2 \cdot (x - 3) = a \cdot (x - 3)$ jest tożsamościowe?

$$2x - 6 = ax - 3a$$

$$2x - ax = 6 - 3a$$

$$x \cdot (2 - a) = 3 \cdot (2 - a)$$

Zastanówmy się teraz, dla jakiego parametru a otrzymamy równanie tożsamościowe postaci $0 \cdot x = 0$.

Będzie ono zachodziło dla $2 - a = 0$, czyli dla $a = 2$.

Jeżeli zatem w miejsce a podstawimy liczbę 2 otrzymamy $0 \cdot x = 3 \cdot 0$, czyli $0 \cdot x = 0$.

Zatem aby równanie było tożsamościowe $a = 2$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $a \cdot (x + 1) = 2x + 1$ z niewiadomą x , gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

$$ax + a = 2x + 1$$

$$ax - 2x = 1 - a$$

$$x \cdot (a - 2) = 1 - a$$

Abyśmy mogli podzielić obie strony równania przez wyrażenie znajdujące się przy x należy najpierw założyć, że $a \neq 2$.

Wówczas otrzymamy rozwiązanie

$$x = \frac{1-a}{a-2}$$

Jeżeli $a = 2$ wówczas równanie ma postać $x \cdot 0 = 1 - 2$, czyli $0 = -1$.

Ponieważ otrzymaliśmy zdanie fałszywe, równanie nie posiada rozwiązania, czyli jest sprzeczne.

Przykład 4

Ustalimy, dla jakich wartości parametru p rozwiązaniem równania $3x - \sqrt{2}p = 4 \cdot (x + 2) - 2 - p$ jest liczba mniejsza od (-4) .

Najpierw zapiszemy równanie w prostszej postaci.

$$3x - \sqrt{2}p = 4 \cdot (x + 2) - 2 - p$$

$$3x - \sqrt{2}p = 4x + 8 - 2 - p$$

$$3x - \sqrt{2}p = 4x + 6 - p$$

$$3x - 4x = \sqrt{2}p - p + 6$$

$$-x = \sqrt{2}p - p + 6$$

$$x = p - \sqrt{2}p - 6$$

Aby rozwiązaniem równania była liczba mniejsza od (-4) musi zachodzić warunek:

$$p - \sqrt{2}p - 6 < -4$$

$$p - \sqrt{2}p < 2$$

Wyciągamy p przed nawias.

$$p \cdot (1 - \sqrt{2}) < 2$$

Podzielimy obie strony nierówności przez $(1 - \sqrt{2})$. Jest to wyrażenie ujemne, więc zmienimy znak nierówności na przeciwny.

$$p > \frac{2}{1 - \sqrt{2}}$$

Zajmiemy się teraz usunięciem niewymierności z mianownika ułamka.

$$p > \frac{2}{1 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

$$p > \frac{2 \cdot (1 + \sqrt{2})}{1 - 2}$$

$$p > -2 \cdot (1 + \sqrt{2})$$

Rozwiązaniem równania jest liczba mniejsza od (-4) , gdy $p \in (-2 \cdot (1 + \sqrt{2}), \infty)$.

Przykład 5

Ustalimy liczbę rozwiązań równania $2 - |3x - 7| = \sqrt{3}p - 2$ w zależności od parametru p .

$$2 - |3x - 7| = \sqrt{3}p - 2$$

$$-|3x - 7| = \sqrt{3}p - 2 - 2$$

$$-|3x - 7| = \sqrt{3}p - 4$$

$$|3x - 7| = 4 - \sqrt{3}p$$

Wiemy, że wartość bezwzględna jest zawsze liczbą nieujemną. Zatem jeżeli prawa strona równania $|3x - 7| = 4 - \sqrt{3}p$ będzie liczbą ujemną, to równanie będzie sprzeczne.

$$4 - \sqrt{3}p < 0$$

$$-\sqrt{3}p < -4$$

$$\sqrt{3}p > 4$$

$$p > \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$p > \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Jeżeli prawa strona równania $|3x - 7| = 4 - \sqrt{3}p$ będzie liczbą równą 0, to równanie będzie miało jedno rozwiązanie.

$$4 - \sqrt{3}p = 0$$

$$p = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Jeżeli prawa strona równania $|3x - 7| = 4 - \sqrt{3}p$ będzie liczbą dodatnią, to równanie będzie miało dwa rozwiązania.

$$4 - \sqrt{3}p > 0$$

$$p < \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Dla $p > \frac{4\sqrt{3}}{3}$ równanie jest sprzeczne, dla $p = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ równanie ma jedno rozwiązanie, a dla $p < \frac{4\sqrt{3}}{3}$ rozwiązaniem równania są dwie liczby.

Słownik

równanie liniowe

równanie, w którym niewiadoma występuje w pierwszej potędze

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją i przeanalizuj, jak badamy liczbę rozwiązań równania liniowego w zależności od parametru a .

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DAYznsKJf>

Animacja zawiera trzy przykłady równania liniowego, którego liczba rozwiązań zależy od parametru a . Przykład pierwszy przedstawia równie, które w zależności od wartości parametru a ma jedno rozwiązanie, lub jest równaniem tożsamościowym, czyli ma nieskończenie wiele rozwiązań. Przykład drugi to trzy równania :pierwsze z nich ma jedno rozwiązanie, drugie równani jest tożsamościowe, a trzecie równanie to równanie sprzeczne. Przykład trzeci to równanie z wartością bezwzględną. Równanie dla różnych wartości a jest sprzeczne, ma jedno rozwiązanie lub ma dwa rozwiązania.

Polecenie 2

Określ liczbę rozwiązań równania $(m^2 - 36) \cdot x = m + 6$ dla $m = -6$ i $m = 6$.

Polecenie 3

Określ liczbę rozwiązań równania $k + 2x = 3k - 4$ w zależności od parametru k .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Analiza równania liniowego z jednym parametrem

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- znajduje wszystkie takie wartości rzeczywiste parametru, aby dana liczba była rozwiązaniem równania
- bada liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru występującego w równaniu
- przeprowadza rozumowania związane z analizą równania liniowego z jednym parametrem, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane ze sposobami rozwiązywania równań liniowych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają animację, tworzą i rozwiązują samodzielnie zadania podobnego typu.
3. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 8.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie mają w domu wykonać polecenia 2 i 3 umieszczone pod animacją.

Materiały pomocnicze:

- [Równanie liniowe](#)

- [Rozwiązywanie równań](#)
- [Zadania generatorowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w animacji uczniowie mogą wykorzystać jako podsumowanie wiadomości związanych z rozwiązywaniem równań.