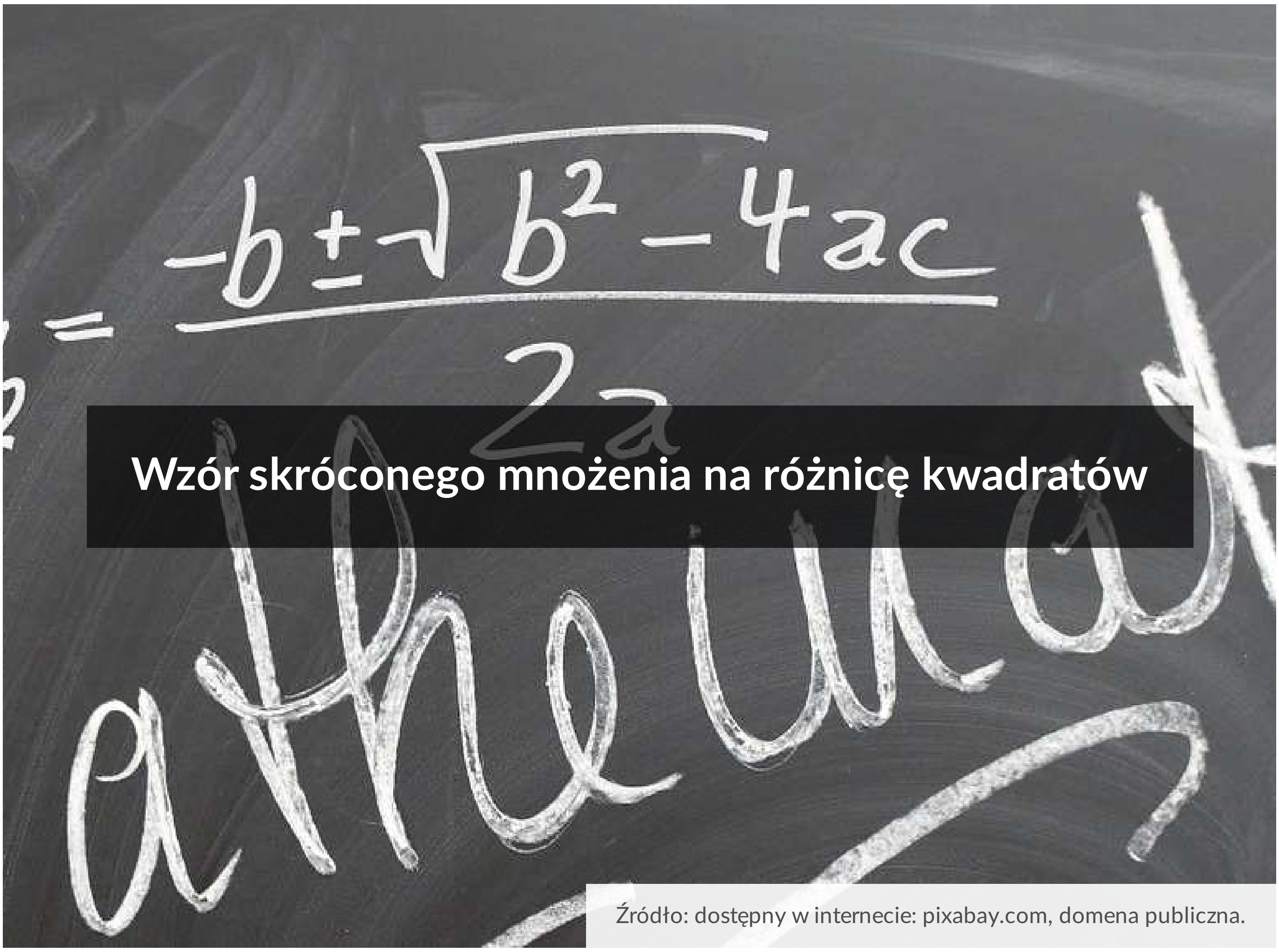
Wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

Wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Przekształcając wyrażenia algebraiczne, często trzeba pomnożyć sumę dwóch wyrażeń przez ich różnicę. Pomocny będzie w tym kolejny wzór skróconego mnożenia, który poznamy, zwany **wzorem skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.**

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.
> - Zapiszesz iloczyn sumy dwóch wyrażeń przez ich różnicę, jako różnicę kwadratów tych wyrażeń.
> - Przekształcisz wyrażenia algebraiczne, wykorzystując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

Przeczytaj

Zapiszemy w postaci sumy iloczyn dwóch dowolnych wyrażeń przez ich różnicę.

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

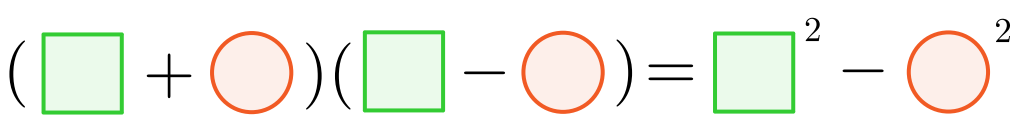
Otrzymaliśmy kolejny wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Ważne!

Wzór na iloczyn sumy przez różnicę:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Wzór ten można zilustrować następująco:



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Zapisujemy odpowiednie twierdzenie.

Twierdzenie: Twierdzenie o iloczynie sumy przez różnicę

Iloczyn sumy dwóch dowolnych wyrażeń przez ich różnicę równa się różnicy kwadratów tych wyrażeń.

Przykład 1

Zapiszemy iloczyny w postaci różnicy kwadratów.

$(x+1)(x-1)=x^2-1$

$\left(a^2+b\right)\left(a^2-b\right)=a^4-b^2$

$(2x+3y)(2x-3y)=4x^2-9y^2$

$\left(0,5xy+\sqrt{2}\right)\left(0,5xy-\sqrt{2}\right)=0,25x^2y^2-2$

Korzystając z przemienności mnożenia poznany wzór można zapisać w postaci

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

i podobnie jak w Przykładzie 1, zapisywać iloczyny w postaci różnicy kwadratów.

> **Przykład 2**
>
> Zapiszemy iloczyny w postaci różnicy kwadratów.
>
> $$\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)=9-2=7$$
>
> $$\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right)=x^2-12$$
>
> $$\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)=6-5=1$$

Przekształcając wyrażenia algebraiczne, warto pamiętać, że chcąc w sumie algebraicznej zmienić znaki wyrażeń na przeciwne, trzeba wyłączyć (-1) przed nawias w tej sumie (czyli w praktyce – znak „$-$”).

> **Przykład 3**
>
> - Aby pomnożyć wyrażenia $(-2-x)(2-x)$, w pierwszym czynniku wyłączymy przed nawias (-1).
>
> $$(-2-x)(2-x)=-(2+x)(2-x)=-\left(4-x^2\right)=-4+x^2$$
>
> - W podobny sposób pomnożymy $(-4x+y)(-4x-y)$.
>
> $$(-4x+y)(-4x-y)=-(4x-y)\cdot(-1)\cdot(4x+y)=$$
>
> $$=(4x-y)(4x+y)=16x^2-y^2$$

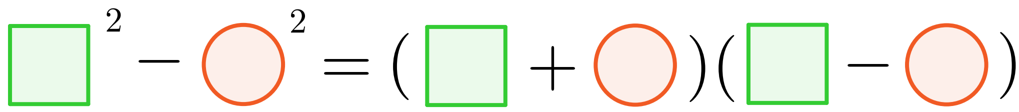
Wzór $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ można zapisać też w postaci

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Obie te postacie nazywamy **wzorem skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń**.

> **Ważne!**
>
> **Wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:**
>
> $$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Wzór ten można zilustrować następująco:

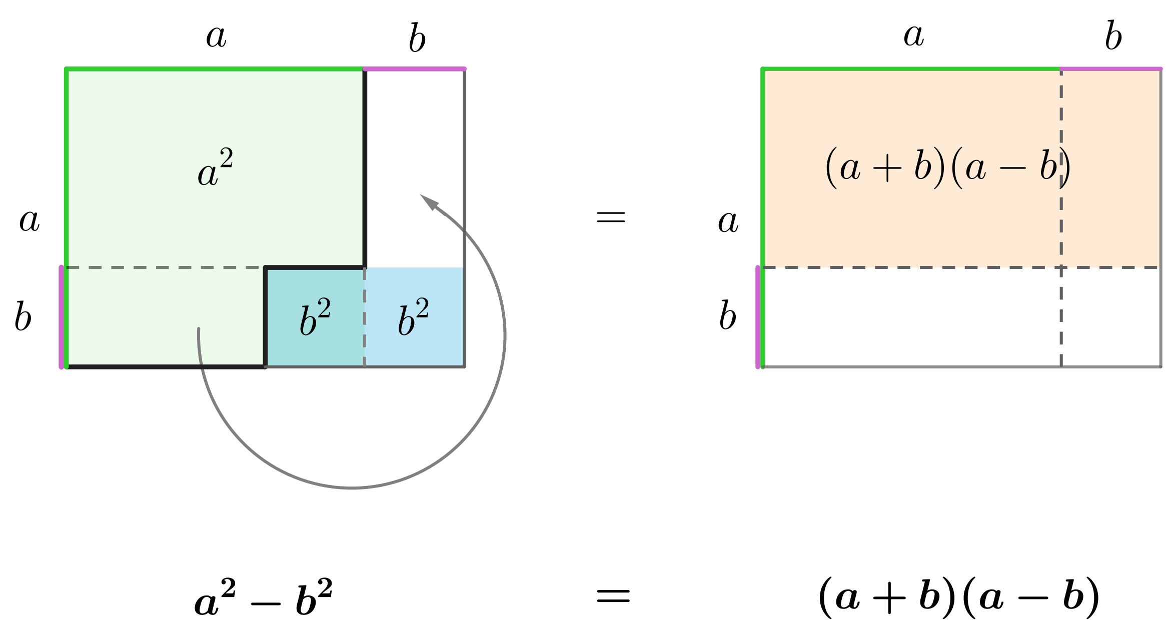


Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Formułujemy odpowiednie twierdzenie.

> **Twierdzenie: Twierdzenie o różnicy kwadratów dwóch wyrażeń**
>
> Różnica kwadratów dwóch dowolnych wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez ich różnicę.

Oto interpretacja geometryczna wzoru.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

> **Przykład 4**
>
> Przekształcimy podane sumy algebraiczne na iloczyny.
>
> $$4 - y^2 = 2^2 - y^2 = (2+y)(2-y)$$
>
> $$16x^2 - 9 = (4x)^2 - 3^2 = (4x+3)(4x-3)$$
>
> $$a^4b^4 - 25a^2 = \left(a^2b^2\right)^2 - (5a)^2 = \left(a^2b^2 - 5a\right)\left(a^2b^2 + 5a\right)$$

> **Przykład 5**

Zapiszemy podane wyrażenie w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość dla $x = -\sqrt{2}$.

$2(x+1)(x-1) + \left[(-x-1)(x-1) - x^2\right] =$

$= 2\left(x^2 - 1\right) + \left[-(x+1)(x-1) - x^2\right] =$

$= 2x^2 - 2 + \left(-x^2 + 1 - x^2\right) = -1$

Rozpatrywane wyrażenie dla każdej liczby rzeczywistej x ma stałą wartość, równą (-1).

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia dla $x = -\sqrt{2}$ jest równa (-1).

Słownik

wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

różnica kwadratów dwóch dowolnych wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez ich różnicę

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, rozwiązując samodzielnie podane przykłady, a następnie sprawdź ich rozwiązania.

Polecenie 2

Oblicz pole prostokąta o bokach długości $\sqrt{7} + 6\sqrt{5}$ i $6\sqrt{5} - \sqrt{7}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest równa 27. Znajdź te liczby.

Ćwiczenie 8

Zapisz podane wyrażenie w najprostszej postaci.

$$\sqrt{2} \cdot \left(2\sqrt{6} - 3\right)\left(3 + 2\sqrt{6}\right) - \left(3\sqrt{2} + 3\right)^2 + \left(3\sqrt{2} - 3\right)^2$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje różnicę kwadratów w postaci sumy, wykorzystując odpowiedni wzór skróconego mnożenia
- zamienia sumę algebraiczną na iloczyn, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów
- przekształca wyrażenia algebraiczne, z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów
- analizuje niestandardowe problemy algebraiczne i dobiera odpowiednią strategie do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dywanik pomysłów
- ćwiczenia interkatywne

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów, aby w domu przypomnieli sobie procedury obowiązujące przy dowodzeniu prostych twierdzeń.

Faza wstępna:

Praca w parach. Uczniowie, korzystając z umiejętności ukształtowanych na poprzednich lekcjach, przypominają sposoby przekształcania wyrażeń algebraicznych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.

Zapisują odpowiednie przykłady.

W razie wątpliwości uczniowie proszą o pomoc nauczyciela. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Ćwiczenie 1
Praca w grupach. Każda z grup wyprowadza wzór na różnicę kwadratów i podaje jego interpretację graficzną.

Ćwiczenie 2
Metodą dywanika pomysłów grupy przygotowują przykłady zastosowania wyprowadzonego wzoru.

Ćwiczenie 3
Uczniowie w grupach oglądają galerię zdjęć interaktywnych. Na jej podstawie weryfikują

swoje zapisy.

Ćwiczenie 4
Prezentacja prac grup, wspólne zapisanie wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Ćwiczenie 5
Wspólna praca uczniów – uczniowie kolejno podają przykłady na mnożenie sumy dwóch wyrażeń przez ich różnicę, ochotnicy zapisują na tablicy te przykłady w postaci różnicy kwadratów.

Ćwiczenie 6
Praca indywidualna uczniów – uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

Końcowy element zajęć to podsumowanie przez uczniów pracy grup, określenie czy postawione cele zostały osiągnięte, wskazanie przez nauczyciela ważnych elementów zajęć, ocena pracy uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest przygotowanie na następną lekcję przykładów wykorzystania poznanego wzoru w obliczeniach arytmetycznych. Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Księga liczb, J.H. Conway, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1999 – rozdział o trójkącie Pascala.

Działania na wyrażeniach algebraicznych – przykłady

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać do samodzielnej pracy uczniów, jako wstęp do zajęć.