



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Materiał składa się z sekcji: "Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa", "Trójki pitagorejskie", "Określanie rodzaju trójkąta z wykorzystaniem twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa".

Materiał zawiera ćwiczenia, w tym ćwiczenia interaktywne.

Zawartość tekstowa: budowa i przykład twierdzenia i twierdzenia odwrotnego, określenie i przykłady trójek pitagorejskich.

Przykłady: twierdzenia odwrotnego do tw. Pitagorasa, zastosowania tw. odwrotnego do tw. Pitagorasa.

Ćwiczenia: przykłady trójek pitagorejskich, twierdzeń i twierdzeń odwrotnych, zastosowanie tw. odwrotnego do tw. Pitagorasa.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

W tym materiale przypomnisz sobie czym jest twierdzenie odwrotne oraz równoważność utworzona z twierdzenia i twierdzenia do niego odwrotnego.

Zapoznasz się z twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Pitagorasa i zastosujesz je w zadaniach.

Przykład 1

- **Twierdzenie**

Jeżeli trójkąt prostokątny jest równoramienny, to jego kąty ostre mają równe miary.

- **Twierdzenie odwrotne**

Jeżeli kąty ostre w trójkącie prostokątnym mają równe miary, to trójkąt ten jest równoramienny.

- **Równoważność**

Trójkąt prostokątny jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy jego kąty ostre mają równe miary.

Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe i twierdzenie do niego odwrotne też jest prawdziwe, to utworzona z nich równoważność jest również prawdziwa.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Wiemy już, że zamiana założenia z tezą nie zawsze prowadzi do twierdzenia prawdziwego.

W przypadku twierdzenia Pitagorasa twierdzenie odwrotne jest też prawdziwe.

Twierdzenie: Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

W zastosowaniach praktycznych posługujemy się poniższą wersją twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

Ważne!

Jeżeli liczby a , b , c będące długościami boków trójkąta (gdzie c – długość najdłuższego z boków) spełniają warunek

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

to trójkąt ten jest prostokątny.

Znając długości boków trójkąta i wykorzystując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, można stwierdzić, czy trójkąt jest prostokątny.

Przykład 2

Sprawdzimy, czy trójkąt o bokach długości 15, 17, 8 jest prostokątny.

Ustalamy, że najdłuższy bok trójkąta ma długość 17.

- Obliczamy kwadrat liczby 17.

$$17^2 = 289.$$

- Obliczamy sumę kwadratów długości dwóch krótszych boków.

$$15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289.$$

- Porównujemy znalezione liczby.

$$289 = 289.$$

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa stwierdzamy, że trójkąt o bokach długości 15, 17 i 8 jest trójkątem prostokątnym.

Przykład 3

Sprawdzimy, czy trójkąt o bokach długości 2, 3, $2\sqrt{3}$ jest trójkątem prostokątnym.

- Oznaczmy

$$a = 2$$

$$b = 3$$

$$c = 2\sqrt{3} - \text{długość najdłuższego boku}$$

- Sprawdzimy, czy $a^2 + b^2 = c^2$.
- Obliczamy sumę kwadratów długości krótszych boków i kwadrat długości najdłuższego boku.

$$a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$c^2 = (2\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

- Porównujemy znalezione liczby.

$$13 \neq 12,$$

czyli

$$a^2 + b^2 \neq c^2.$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa stwierdzamy, że trójkąt nie jest trójkątem prostokątnym (gdyby był prostokątny, to musiałaby być prawdziwa równość $a^2 + b^2 = c^2$).

Trójki pitagorejskie

- Starożytni Egipcjanie wyznaczyli kąt prosty, wykorzystując trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4, 5, nazywany obecnie trójkątem egipskim.
- Hindusi posługiwali się trójkątem o bokach długości: 5, 12, 13.
- W obu przypadkach długości boków trójkątów wyrażały się liczbami naturalnymi.
- **Trójki liczb naturalnych** a, b, c , które wyrażają długości boków trójkąta prostokątnego, nazwano **trójkami pitagorejskimi**. Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa można stwierdzić, że poszukiwanie ich sprowadza się do rozwiązania równania

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

- Odkrycie ogólnej metody znajdowania tych liczb przypisuje się matematykowi greckiemu Diofantosowi, żyjącemu w III wieku n.e. w Aleksandrii. Wyznaczał on trójki pitagorejskie według wzoru

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2mn$$

$$c = m^2 + n^2,$$

gdzie m, n dowolne liczby naturalne względnie pierwsze, które nie są jednocześnie nieparzyste i takie, że $m > n$.

Na przykład.

Niech $m = 3, n = 2$

$$a = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$c = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13.$$

Trójkę pitagorejską tworzą liczby: 5, 12, 13.

Niektóre trójki pitagorejskie przedstawiono w tabeli poniżej.

liczby z trójki	I	II	III	IV	V	VI
a	3	5	7	9	11	15
b	4	12	24	40	60	8
c	5	13	25	41	61	17



Zapisz dowolną trójkę pitagorejską.

1. Pomnóż każdą z zapisanych liczb przez tę samą dowolną liczbę naturalną większą od 1. Sprawdź, czy utworzone w ten sposób liczby tworzą trójkę pitagorejską. Co zauważasz?
2. Pomnóż każdą z zapisanych liczb przez tę samą, dowolną liczbę dodatnią. Sprawdź, czy utworzone w ten sposób liczby tworzą trójkę pitagorejską. Co zauważasz?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Określanie rodzaju trójkąta z wykorzystaniem twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że jeżeli suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest równa polu kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Zastanowimy się teraz, czy można określić rodzaj trójkąta, wiedząc, że suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest mniejsza (albo większa) od pola kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku.

Polecenie 1

Trójkąt jest prostokątny.

Pola kwadratów wynoszą odpowiednio:

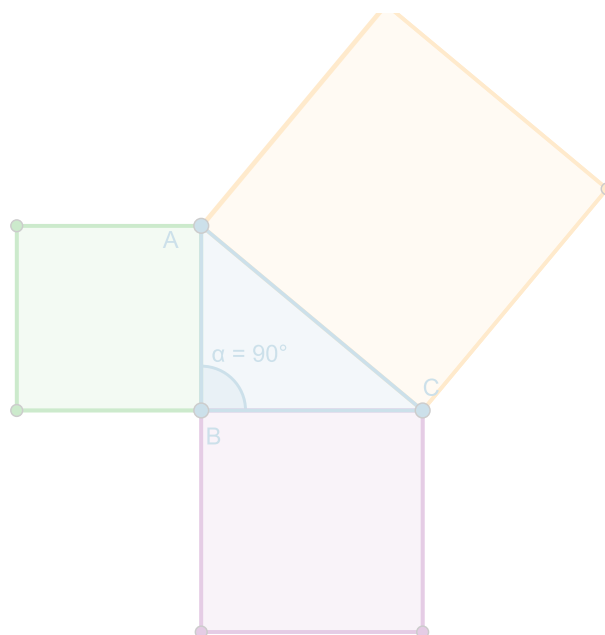
$$\text{pole}_{\text{pomarańczowy}} = 15.25$$

$$\text{pole}_{\text{zielony}} = 6.25$$

$$\text{pole}_{\text{fioletowy}} = 9$$

Suma pól mniejszych kwadratów wynosi

$$\text{suma}_{\text{ziel+nieb}} = 15.25$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PyhARvUuK>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na bokach trójkąta ABC skonstruowane są kwadraty.

Zmień czterokrotnie położenie wierzchołków trójkąta ABC , tak aby w każdym przypadku bok AC był najdłuższym bokiem i aby suma pól kwadratów zbudowanych na bokach AB i BC była większa od pola kwadratu zbudowanego na boku AC . Określ w każdym przypadku rodzaj otrzymanego trójkąta (prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny). Zapisz twierdzenie, które możesz sformułować na podstawie obserwacji.

1. Sformułuj też twierdzenie odwrotne i sprawdź na 3 przykładach, czy jest prawdziwe.
2. Powtórz ten sam eksperyment, tak zmieniając położenie wierzchołków trójkąta ABC , aby suma pól kwadratów zbudowanych na bokach AB i BC była mniejsza od pola kwadratu zbudowanego na boku AC .
3. Sformułuj odpowiednie twierdzenie i twierdzenie do niego odwrotne.

Ważne!

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów możemy sformułować dwie pary twierdzeń:

- Jeżeli suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest większa od pola kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku, to trójkąt jest ostrokątny.
- Jeżeli trójkąt jest ostrokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest większa od pola kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku.
- Jeżeli suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest mniejsza od pola kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku, to trójkąt jest rozwartokątny.
- Jeżeli trójkąt jest rozwartokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest mniejsza od pola kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku.

Twierdzenia sformułowaliśmy na podstawie obserwacji, ale można udowodnić, że twierdzenia te są prawdziwe.

Twierdzenie: Rodzaje trójkątów a długości boków

Niech liczby a , b , c , gdzie $c > a$ i $c > b$ będą długościami boków trójkąta.

- Trójkąt ten jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.
- Trójkąt ten jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 > c^2$.
- Trójkąt ten jest rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 < c^2$.

Przykład 4

Trójkąt o bokach długości 6, 7, 8 jest **ostrokątny**, bo

$$6^2 + 7^2 = 85 > 64 = 8^2.$$

Trójkąt o bokach długości 4, 4, 7 jest **rozwartokątny**, bo

$$4^2 + 4^2 = 32 < 49 = 7^2.$$

Ćwiczenie 2



Sformułuj twierdzenie odwrotne do podanego twierdzenia. Czy twierdzenie to jest prawdziwe, czy fałszywe?

1. Jeżeli dwa trójkąty są przystające, to odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają równe długości.
2. Jeżeli kąty x i y są kątami przyległymi, to ich suma jest równa kątowi półpełnemu.
3. Jeżeli trójkąt jest równoboczny, to środek okręgu opisanego na tym trójkącie jest punktem wspólnym trzech wysokości tego trójkąta.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Ustal, który z trójkątów o podanej długości boków: k , d , c jest prostokątny. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ $k = \sqrt{3} \text{ m}, d = \sqrt{13} \text{ m}, c = 4 \text{ m}$

☐ $k = \sqrt{29} \text{ mm}, d = 5 \text{ mm}, c = 2 \text{ mm}$

☐ $k = 2 \text{ cm}, d = 3 \text{ cm}, c = 4 \text{ cm}$

☐ $k = 3 \text{ dm}, d = \sqrt{10} \text{ dm}, c = 1 \text{ dm}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Zaznacz prawidłowe zakończenie zdania. Trójkątem prostokątnym jest trójkąt o bokach długości

☐ 2 cm, 4 cm, $3\sqrt{5}$ cm.

☐ 7 cm, 11 cm, 13 cm.

☐ 7 cm, 1 cm, $5\sqrt{2}$ cm.

☐ 3 cm, 5 cm, 6 cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Liczba n jest liczbą naturalną dodatnią. Zaznacz prawidłowe zakończenie zdania. Trójkątem prostokątnym jest trójkąt o bokach długości

☐ $n, 2n, n\sqrt{7}$.

☐ $n, 2n, n\sqrt{3}$.

☐ $2n, 2n, 3n$.

☐ $5n, 2n, 4n$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Liczba a jest dodatnia i większa od 1. Ustal, który z trójkątów o podanej długości boków jest prostokątny. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $a^2, a - 1, 3a$

☐ $3a, a, a\sqrt{10}$

☐ $8a, 6a, 3a$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Zaznacz prawidłowe zakończenie zdania. Boki trójkąta prostokątnego mają długości a , 11, 61, gdy

☐ $a = 63$.

☐ $a = 60$.

☐ $a = 59$.

☐ $a = 55$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Ustal, który z trójkątów o podanym stosunku długości boków jest prostokątny. Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐ 5 : 4 : 3

☐ 17 : 15 : 8

☐ 2 : 3 : 2

☐ 24 : 7 : 25

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Trawnik ma kształt trójkąta, którego boki pozostają w stosunku 25 : 24 : 7. Na ogrodzenie trawnika zużyto 224 m płotki. Wyznacz wymiary działki, a następnie sprawdź, czy trawnik ma kształt trójkąta prostokątnego.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Znajdź sumę długości przekątnych p i d prostokąta o bokach długości a i b . Uzupełnij poniższe równości, wpisując w luki odpowiednie liczby.

- $a = 9 \text{ cm}, b = 12 \text{ cm}$

$$p + d = \boxed{} \text{ cm}$$

- $a = 2 \text{ cm}, b = \sqrt{5} \text{ cm}$

$$p + d = \boxed{} \text{ cm}$$

- $a = 3 \text{ cm}, b = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

$$p + d = \boxed{} \text{ cm}$$

- $a = 9 \text{ dm}, b = 40 \text{ dm}$

$$p + d = \boxed{} \text{ cm}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Podaj parę liczb naturalnych, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątna ma długość 100.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



W trójkącie prostokątnym jeden z boków ma długość 2 cm, a drugi jest o 1 cm dłuższy. Oblicz pole trójkąta. Rozpatrz wszystkie możliwości.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Boki trójkąta pitagorejskiego mają długości: n , $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n^2+1}{2}$, gdzie n jest liczbą naturalną nieparzystą, większą od 1. Dla wskazanych wartości n wyznacz długości boków, obwód i pole trójkąta. Uzupełnij poniższe zdania i równości, wpisując w luki odpowiednie liczby.

- $n = 3$

Długości boków tego trójkąta wynoszą 3, , .

$L =$, $P =$

- $n = 9$

Długości boków tego trójkąta wynoszą 9, , .

$L =$, $P =$

- $n = 11$

Długości boków tego trójkąta wynoszą 11, , .

$L =$, $P =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



1. Wykaż, że liczby a, b, c postaci $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$, gdzie m, n to dowolne liczby naturalne względnie pierwsze, które nie są jednocześnie liczbami nieparzystymi i takie, że $m > n$, są długościami boków trójkąta prostokątnego.
2. Wykaż, że mnożąc przez tę samą liczbę naturalną, każdą z liczb $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$, tworzących trójkę pitagorejską, otrzymujemy również trójkę pitagorejską.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Sprawdź dla trzech dowolnych liczb naturalnych $n > 1$, czy liczby postaci

$$2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1$$

mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są równe $m + 1$ i 4, gdzie m jest liczbą dodatnią. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $m + 3$. Znajdź liczbę m . Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

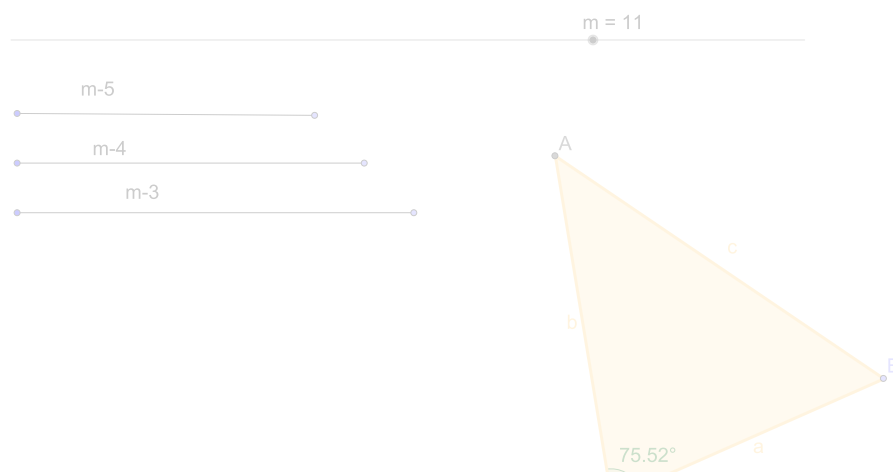
Parametr m wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 2

Znajdź liczbę $m < 16$, dla której liczby $m - 5$, $m - 4$, $m - 3$ są długościami boków trójkąta prostokątnego.

Rozwiąż zadanie algebraicznie i graficznie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PyhARvUuK>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Czy równoległobok o podanych bokach jest prostokątem? Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Równoległobok o bokach długości 2 i 6 oraz przekątnej długości 5 jest prostokątem.

☐ Równoległobok o bokach długości 3 i 4 oraz przekątnej długości 5 jest prostokątem.

☐ Równoległobok, którego dwa nierównoległe boki mają długości 5 i 5 oraz o przekątnej długości $5\sqrt{2}$ jest prostokątem.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Sprawdź czy istnieje romb o boku długości 13 oraz przekątnych długości 10 i 24.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Na podstawie AB trójkąta ABC obrano punkt D . Odcinek AC ma długość 5, odcinek CD ma długość 3, natomiast AD ma długość 4. Wykaż, że CD jest wysokością trójkąta ABC .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



W trójkącie równobocznym ABC punkt D jest środkiem podstawy AB . Wykaż, że odcinek CD jest wysokością tego trójkąta.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.