



Mnożenie wielomianu przez liczbę i przez jednomian

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zapewne wiesz już, jakie własności ma dodawanie i odejmowanie wielomianów. Teraz dążymy do określenia iloczynu dwóch wielomianów.

Jednomian jest szczególnym przypadkiem wielomianu. W tym materiale zajmiemy się obliczaniem iloczynu wielomianu jednej zmiennej przez liczbę oraz obliczaniem iloczynu wielomianu jednej zmiennej przez jednomian tej zmiennej i własnościami tych działań.

Twoje cele

- Przeanalizujesz i sformułujesz własności iloczynu wielomianu przez jednomian.
- Ustalisz zależność między stopniem wielomianu i mnożonego przez niego jednomianu.

Przeczytaj

Przykład 1

Dany jest wielomian $W(x) = 3x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 5x + 4$. Obliczymy iloczyn wielomianu $W(x)$ przez liczbę $(-\frac{2}{3})$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}W(x) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) &= -\frac{2}{3}W(x) = \\&= -\frac{2}{3}(3x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 5x + 4) = \\&= -\frac{2}{3} \cdot 3x^5 + \frac{2}{3} \cdot 2x^4 + \frac{2}{3} \cdot 7x^3 - \frac{2}{3} \cdot 5x - \frac{2}{3} \cdot 4 = \\&= -2x^5 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{14}{3}x^3 - \frac{10}{3}x - \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Własność: Stopień iloczynu wielomianu przez jednomian

- Iloczyn wielomianu **stopnia n** i **jednomianu** stopnia k jest wielomianem stopnia $n + k$.
- Iloczyn wielomianu stopnia n i **wielomianu zerowego** jest wielomianem zerowym.

Przykład 2

Dany jest wielomian 4 stopnia $W(x) = -7x^4 + 11x^3 - 4x^2 - 9x + 12$.

Jaki wielomian uzyskamy obliczając iloczyn wielomianu $W(x)$ i jednomianu $5x^{11}$?

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}W(x) \cdot 5x^{11} &= 5x^{11}(-7x^4 + 11x^3 - 4x^2 - 9x + 12) = \\&= -35x^{15} + 55x^{14} - 20x^{13} - 45x^{12} + 60x^{11},\end{aligned}$$

czyli uzyskamy wielomian stopnia 15.

Przykład 3

Dane są wielomiany $W(x) = 2x^5 - 5x^4 - 11x^3 + 4x^2 - 2x - 13$ oraz $P(x) = -7x^9 + 12x^5 + 5x^2$.

Wyznamy **wielomian** $F(x) = 12x^6 \cdot W(x) - 5x^2 \cdot P(x)$.

Rozwiązanie

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DPjyJZ38>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej mnożenia wielomianów przez liczbę i przez jednomian.

Przykład 4

Dane są wielomiany $P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x + 9$ oraz $Q(x) = 12x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 5$. Niech $W(x) = a \cdot P(x) + b \cdot Q(x)$.

a) Wyznamy wzór wielomianu $W(x)$ w postaci uporządkowanej.

b) Dobierzemy wartości parametrów a i b tak, by $W(2) = -11$ i $W(-1) = -29$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } W(x) &= a(5x^3 - 7x^2 + 4x + 9) + b(12x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 5) = \\ &= 5ax^3 - 7ax^2 + 4ax + 9a + 12bx^4 - 3bx^3 - 9bx^2 - 5b = \\ &= 12bx^4 + (5a - 3b)x^3 + (-7a - 9b)x^2 + 4ax + (9a - 5b) \end{aligned}$$

$$\text{b) } W(2) = a \cdot P(2) + b \cdot Q(2)$$

$$P(2) = 5 \cdot 8 - 7 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 9 = 40 - 28 + 8 + 9 = 29$$

$$Q(2) = 12 \cdot 16 - 3 \cdot 8 - 9 \cdot 4 - 5 = 192 - 24 - 36 - 5 = 127$$

$$\text{Zatem } 29a + 127b = -11.$$

$$W(-1) = a \cdot P(-1) + b \cdot Q(-1)$$

$$P(-1) = -5 - 7 - 4 + 9 = -7$$

$$Q(-1) = 12 + 3 - 9 - 5 = 1$$

$$\text{Więc } -7a + b = -29.$$

Pozostaje rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 29a + 127b = -11 \\ -7a + b = -29 \end{cases}.$$

Warunki zadania są spełnione dla

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Słownik

jednomian zmiennej x

iloczyn stałej (liczby) i zmiennej x podniesionej do potęgi o wykładniku naturalnym

stopień wielomianu jednej zmiennej

dla wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (przy założeniu, że $a_n \neq 0$) to liczba n odpowiadająca najwyższemu wykładnikowi potęgi wielomianu; jeśli wielomian jest stałą niezerową, to jego stopień wynosi 0; wielomian zerowy nie ma określonego stopnia. Symbol stopnia wielomianu $W(x)$: $\text{st}(W(x))$ lub $\text{deg}(W(x))$

wielomian

wyrażenie, które jest sumą jednomianów; wielomian można zapisać w postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

wielomian zerowy

wielomian określony wzorem $W(x) = 0$ (czyli funkcja stała przyjmująca wartość 0 dla każdej liczby rzeczywistej); wielomian ten nie ma określonego stopnia

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Oblicz iloczyny liczb i wielomianów oraz iloczyny jednomianów i wielomianów. Wskaż właściwe odpowiedzi.

Polecenie 2

Oblicz i przedstaw w postaci uporządkowanej następujące iloczyny:

- $-\frac{2}{3}x^5(12x^5 - 9x^4 + 21x^3 - 6x + 39)$
- $16x^{11}(5x^{13} - 2x^7 + 9x^4 - 3x)$
- $0,6(45x^4 - 25x^3 - 30x^2 + 5x - 125)$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Sprawdź, czy iloczyn jednomianu przez wielomian obliczony jest poprawnie:

$2x^5 \cdot$	$(-x^6 + 3x^5 - 5x^3 - 2x)$	$= -2x^{12} + 6x^{11} - 10x^8 -$
$x^4 \cdot$	$(-x^7 + 3x^6 + 5x^3 - 2x^2)$	$= -2x^{12} + 6x^{10} - 10x^8 -$
$-2x^7 \cdot$	$(-2x^8 + 6x^6 - 10x^4 - 4x^3)$	$= -2x^{12} + 6x^{11} - 10x^9 -$
$2x^6 \cdot$	$(x^5 - 3x^4 + 5x + 2)$	$= -2x^{12} + 6x^{11} + 10x^8 -$

Ćwiczenie 2



Dane są wielomiany: $F(x)$ stopnia piątego, $G(x)$ stopnia siódmego, $P(x)$ stopnia czwartego oraz wielomian zerowy $Q(x)$. Wskaż wszystkie działania, których wynikiem jest wielomian stopnia 12:

$x^2 \cdot F(x) + x^3 \cdot G(x) + x^4 \cdot P(x) + x^5 \cdot Q(x)$

$5 \cdot F(x) + 3x^5 \cdot G(x) + x^7 \cdot P(x) + x^2 \cdot Q(x)$

$4x^7 \cdot F(x) - 5x^2 \cdot G(x) + 4 \cdot P(x) + x^{13} \cdot Q(x)$

$12x^{12} \cdot F(x) + 12x \cdot G(x) + x^4 \cdot Q(x)$

Ćwiczenie 3



Dobierz jednomian i wielomian, których iloczynem jest wielomian zapisany powyżej.

$$15x^{11} - 6x^{10} + 3x^7$$

$3x^5$

$3x^7$

$5x^6 - 2x^5 + 1$

x^5

$15x^6 - 6x^5 + 4x$

3

$5x^{11} - 2x^{10} + 3$

$5x^4 - 2x^3 + 1$

$$15x^{11} - 6x^{10} + 3x^5$$

$$15x^{11} - 6x^{10} + 4x^6$$

$$15x^{11} - 6x^{10} + 9$$

Ćwiczenie 4



Dane są wielomiany $W(x) = -7x^5 + 22x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ oraz $P(x) = -4x^9 + 7x^6 - x^2 - 7$. Wskaż wielomian $4x^5 \cdot W(x) - 7x \cdot P(x)$:

$-56x^{10} + 88x^9 - 52x^8 + 29x^7 + 8x^6 - 4x^5 - 7x^3 - 49x$

$88x^9 - 52x^8 - 61x^7 + 8x^6 - 4x^5 + 7x^3 + 7x$

$28x^9 - 49x^6 - 28x^5 + 88x^4 - 52x^3 - 13x^2 + 8x + 45$

$-28x^9 + 49x^6 - 28x^5 + 88x^4 - 52x^3 - 27x^2 + 8x - 53$

$88x^9 - 52x^8 - 69x^7 + 8x^6 - 4x^5 + 7x^3 + 49x$

Ćwiczenie 5



Dobierz w pary jednomian i wielomian, których iloczynem jest wielomian

$$W(x) = 60\sqrt{2}x^5 - 24\sqrt{3}x^3:$$

$$-4\sqrt{2}x^3$$

$$3\sqrt{6} - 15x^2$$

$$5\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{2}$$

$$12x^3$$

$$4\sqrt{3} - 10\sqrt{2}x^2$$

$$60\sqrt{2}x^2 - 24\sqrt{3}$$

$$-6x^3$$

$$4\sqrt{6}x^3$$

$$60x^2 - 12\sqrt{6}$$

$$x^3$$

$$5\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}x^3$$

Ćwiczenie 6



Dany jest wielomian $W(x) = 8 + x(9 + x(7 + x(6 + x(2 + x(3 + 4x))))))$. Wykonaj mnożenia i uzupełnij brakujące współczynniki w zapisie wielomianu $W(x)$ w postaci uporządkowanej sumy:

$$W(x) = \boxed{}x^6 + \boxed{}x^5 + \boxed{}x^4 + \boxed{}x^3 + \boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{}$$

Ćwiczenie 7



Dobierz w pary odpowiadające sobie elementy:

$$-2x(5x^7 - 3x^3 - 4)$$

$$-10x^8 + 6x^4 + 8x$$

$$\frac{2x}{7}(-35x^7 + 21x^3 - 14)$$

$$-14x^8 + 6x^4 - 8x$$

$$3x^3(-7x^4 + 8x^2 - 15)$$

$$-21x^7 + 24x^5 - 45x^3$$

$$-7x^3(3x^4 - 5x^2 + 11)$$

$$-10x^8 + 6x^4 - 4x$$

$$-\frac{2x}{5}(35x^7 - 15x^3 + 20)$$

$$-21x^7 + 35x^5 - 77x^3$$

Ćwiczenie 8



Wskaż wszystkie wielomiany, które mogą być uzyskane jako iloczyny wielomianu $W(x) = 6x^4 - 3x^2 + 2x + 4$ przez jakiś jednomian:

$30x^8 - 15x^4 + 10x^3 + 20x^2$

$42x^{12} - 21x^{10} + 14x^9 + 28x^8$

$6\sqrt{2}x^{12} - 3\sqrt{2}x^6 + 2\sqrt{2}x^4 + 4\sqrt{2}x^3$

$-\frac{9}{2}x^5 + \frac{9}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x$

$12x^7 - 6x^5 + 4x^4 + 8x^3$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Mnożenie wielomianu przez liczbę i przez jednomian

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- ustala zależność między stopniem wielomianu i mnożonego przez niego jednomianu,
- analizuje i formułuje własności iloczynu wielomianu przez jednomian.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Gra edukacyjna” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

Nauczyciel określa temat lekcji: „Mnożenie wielomianu przez liczbę i przez jednomian” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach grają w grę edukacyjną i zapisują ewentualne problemy. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują wątpliwości wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian](#)
- [Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias](#)

Wskazówki metodyczne:

- Grę edukacyjną można wykorzystać jako materiał utrwalający umiejętności związane z mnożeniem wielomianu przez liczbę i przez jednomian.
- Gra może zostać wykorzystana na lekcji o działaniach na wyrażeniach algebraicznych.