



Równania i nierówności liczbowe. Przedziały liczbowe

Rozwiązywanie równań i nierówności I stopnia. Zaznaczanie rozwiązań na osi liczbowej.
Animacje: zaznaczanie rozwiązań nierówności na osi liczbowej.

Równania i nierówności liczbowe. Przedziały liczbowe

Analizując przykłady zawarte w tym materiale dowiesz się, jak rozwiązywać równania i nierówności, przekształcając je równoważnie.

Ważne!

Szukając liczb, które spełniają równanie, możemy to równanie przekształcać równoważnie. Stosujemy następujące zasady

- po obu stronach równania można wykonać wskazane działania (np. wykorzystując wzory skróconego mnożenia),
- do obu stron równania możemy dodać to samo wyrażenie, pod warunkiem że nie zmienimy dziedziny równania (wyrażenia możemy przenosić z jednej strony równania na drugą pod warunkiem zmiany znaku tego wyrażenia na przeciwny),
- możemy mnożyć lub dzielić obie strony równania przez dowolną liczbę różną od zera.

Przykład 1

- Rozwiąż równanie

$$\frac{x+1}{2} = 2 - \frac{x-3}{4}.$$

Mnożymy obie strony równania przez 4.

$$2(x+1) = 8 - (x-3)$$

$$2x + 2 = 8 - x + 3$$

$$2x + x = 8 - 2 + 3$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Rozwiązaniem równania $\frac{x+1}{2} = 2 - \frac{x-3}{4}$ jest liczba 3.

- Rozwiąż równanie

$$3(x - 5) = x + 2(x + 4).$$

Przekształcając kolejno, otrzymujemy

$$3(x - 5) = x + 2(x + 4)$$

$$3x - 15 = x + 2x + 8$$

$$3x - x - 2x = 15 + 8$$

$$0 \cdot x = 23.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ $0 \neq 23$. Zatem nie istnieje liczba, która spełnia to równanie. Jest to równanie sprzeczne.

- Wyznacz liczby, które spełniają równanie

$$(x - 3)(x + 2) + 1 = (x - 1)(x + 5) - 5x.$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$x^2 - 3x + 2x - 6 + 1 = x^2 - x + 5x - 5 - 5x$$

$$x^2 - x - 5 = x^2 - x - 5.$$

Po obu stronach równania otrzymaliśmy takie samo wyrażenie. Z tego wynika, że równanie jest spełnione dla dowolnej liczby x . Jest to równanie tożsamościowe.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność

$$3x - 4 < 5x + 2.$$

Przy rozwiązywaniu nierówności możemy wykorzystywać zasady podobne do tych, które pozwalały rozwiązywać równania. Mnożąc lub dzieląc obie strony nierówności przez liczbę ujemną, musimy zmienić zwrot nierówności.

Zapamiętaj!

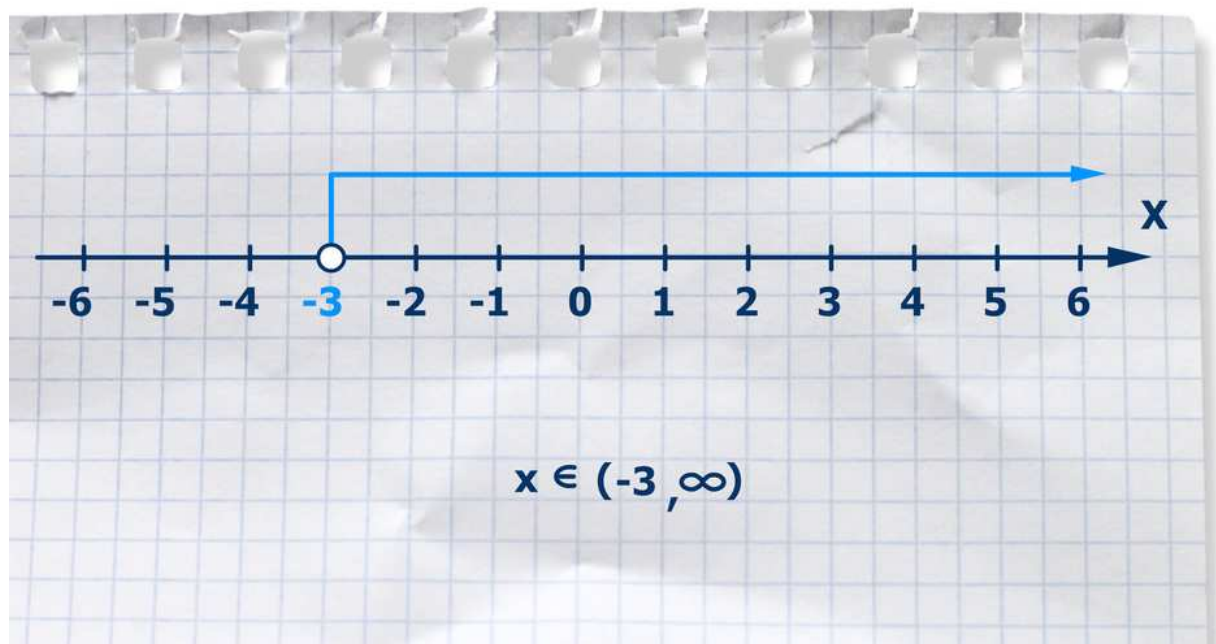
Obie strony nierówności możemy mnożyć lub dzielić przez dowolną liczbę:

- dodatnią – wtedy zachowujemy ten sam zwrot nierówności,
- ujemną – wtedy zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny.

W każdym przypadku otrzymamy nierówność równoważną danej.

Przykład 3

Zaznaczmy na osi liczbowej liczby spełniające nierówność $x > -3$.



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/R1G1LKtuNO0TS](#)

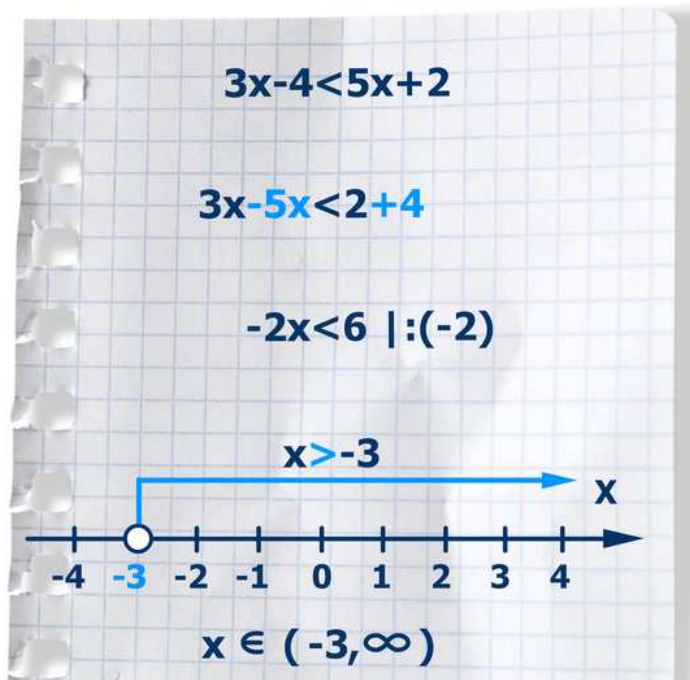
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej -3 niezamalowane kółko. Na osi zaznaczone liczby większe od -3. Zapis: x należy $(-3, \text{nieskończoność})$.

Do zbioru $(-3, +\infty)$ należą liczby większe od (-3) . Zbiór taki nazywamy przedziałem nieograniczonym lewostronnie otwartym. Zapis $x \in (-3, +\infty)$ oznacza, że liczba x należy do tego przedziału, np. $4 \in (-3, +\infty)$, a zapis $x \notin (-3 + \infty)$ oznacza, że liczba x nie należy do tego przedziału np. $-5 \notin (-3 + \infty)$.

Przykład 4

Prześledzimy rozwiązanie „krok po kroku”.



Niewiadome przenosimy na lewą stronę nierówności, a liczby na prawą.

Przenosząc wyrażenie na drugą stronę nierówności, zmieniamy jego znak.

Podzielimy obie strony nierówności przez liczbę stojącą przy niewiadomej x .

Dzielenie stron nierówności przez liczbę ujemną wymaga zmiany zwrotu tej nierówności.

Film dostępny pod adresem [/preview/resource/ReAR4x0bT5Dzv](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia rozwiązanie „krok po kroku” nierówności $3x - 4 < 5x + 4$.

Niewiadome przenosimy na lewą stronę nierówności a liczby na prawą. $3x - 5x < 2 + 4$.

Przenosząc wyrażenie na drugą stronę nierówności zmieniamy jego znak. $-2x < 6$.

Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę stojącą przy niewiadomej x . $x > -3$. Dzielenie stron nierówności przez liczbę ujemną wymaga zmiany zwrotu tej nierówności.

Rozwiązanie nierówności na osi liczbowej z zaznaczonymi punktami od -4 do 4 .

W punkcie o współrzędnej -3 niezamalowane kółko. Na osi zaznaczone liczby większe od -3 . Zapis: x należy $(-3, \infty)$.

Przykład 5

Rozwiąż nierówność

$$\frac{5x + 7}{2} > 3x + 5.$$

Przekształcamy nierówność równoważnie.

$$\frac{5x + 7}{2} > 3x + 5$$

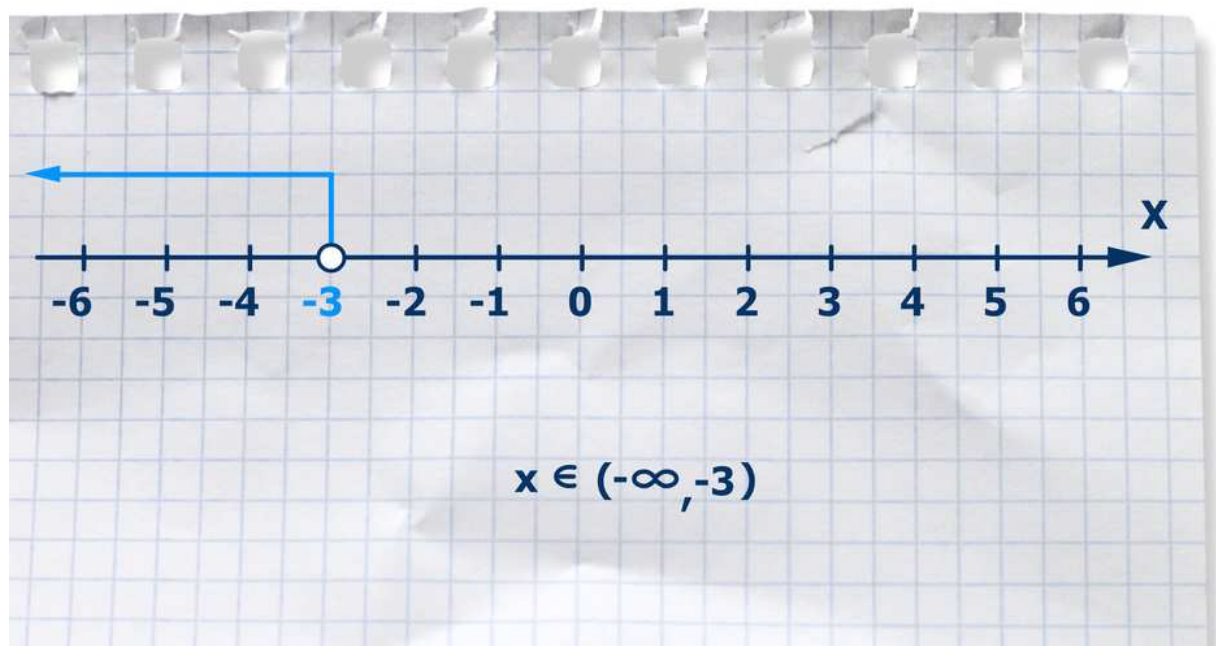
$$5x + 7 > 6x + 10$$

$$5x - 6x > 10 - 7$$

$$-x > 3$$

$$x < -3.$$

Rozwiązaniem nierówności $\frac{5x+7}{2} > 3x + 5$ jest każda liczba mniejsza od (-3) .
Zaznaczmy wszystkie liczby spełniające nierówność $x < -3$ na osi liczbowej.



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/Rc5hGGtnl9cOi](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej -3 niezamalowane kółko. Na osi zaznaczone liczby mniejsze od -3. Zapis: x należy (minus nieskończoność, -3).

Zbiór $(-\infty, -3)$ nazywamy przedziałem nieograniczonym prawostronnie otwartym. Należą do niego liczby mniejsze od (-3) .

Przykład 6

Rozwiąż nierówność

$$(x - 2)^2 \leq (x + 4)(x + 1) - 9.$$

Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które spełniają tę nierówność.
Rozwiązujemy nierówność.

$$(x - 2)^2 \leq (x + 4)(x + 1) - 9$$

$$x^2 - 4x + 4 \leq x^2 + 4x + x + 4 - 9$$

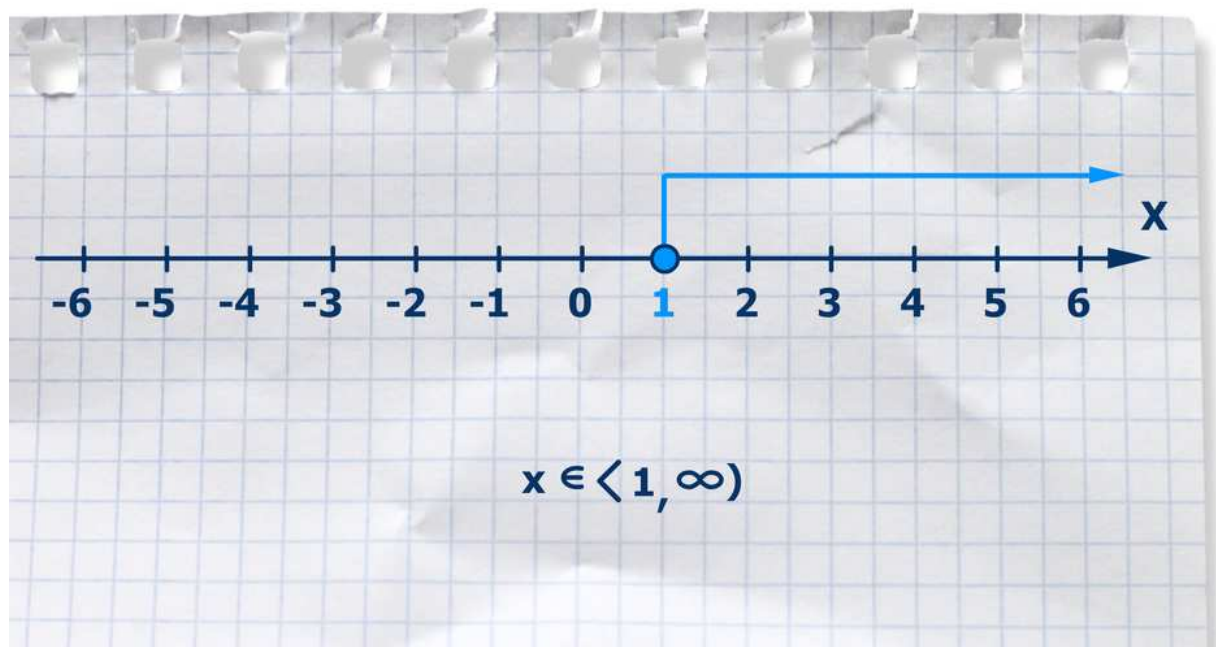
$$x^2 - 4x - 4x - x - x^2 \leq 4 - 9 - 4$$

$$-9x \leq -9$$

$$x \geq 1.$$

Rozwiązaniem nierówności $(x - 2)^2 \leq (x + 4)(x + 1) - 9$ jest każda liczba większa lub równa 1.

Zaznaczymy wszystkie liczby spełniające nierówność $x \geq 1$ na osi liczbowej.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/REALUr9KikGD4>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej 1 zamalowane kółko. Na osi zaznaczone liczby większe lub równe 1. Zapis: x należy $\langle 1, \infty \rangle$ (nieskończoność).

Zbiór $\langle 1, \infty \rangle$ nazywamy przedziałem nieograniczonym lewostronnie domkniętym. Należą do niego liczby większe od 1, razem z liczbą 1.

Przykład 7

Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające nierówność

$$x - 3 \leq \frac{2x - 3}{5}.$$

Rozwiążemy nierówność.

$$x - 3 \leq \frac{2x - 3}{5}$$

$$5(x - 3) \leq 2x - 3$$

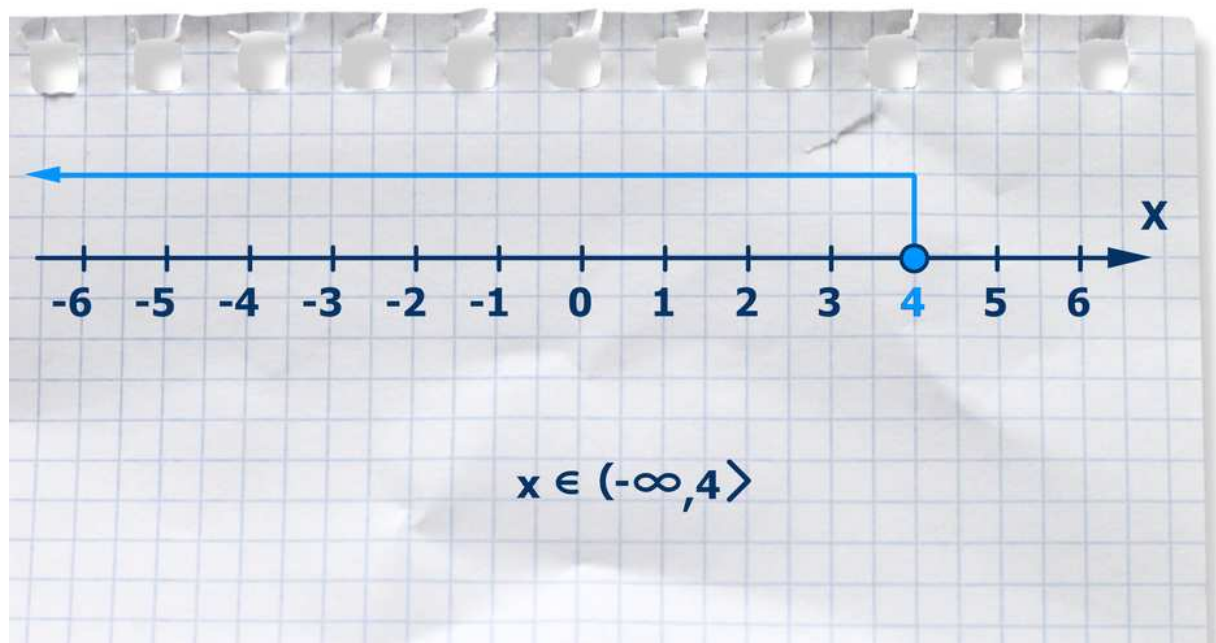
$$5x - 15 \leq 2x - 3$$

$$3x \leq 12$$

$$x \leq 4.$$

Rozwiązaniem nierówności $x - 3 \leq \frac{2x-3}{5}$ jest każda liczba mniejsza lub równa 4.

Zaznaczymy wszystkie liczby spełniające nierówność $x \leq 4$ na osi liczbowej.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RDGueXFc9zbty>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej 4 zamalowane kółko. Na osi zaznaczone liczby mniejsze lub równe 4. Zapis: x należy (minus nieskończoność, 4].

Zbiór $(-\infty, 4]$ nazywamy przedziałem nieograniczonym prawostronnie domkniętym. Należą do niego liczby mniejsze od 4, razem z liczbą 4.