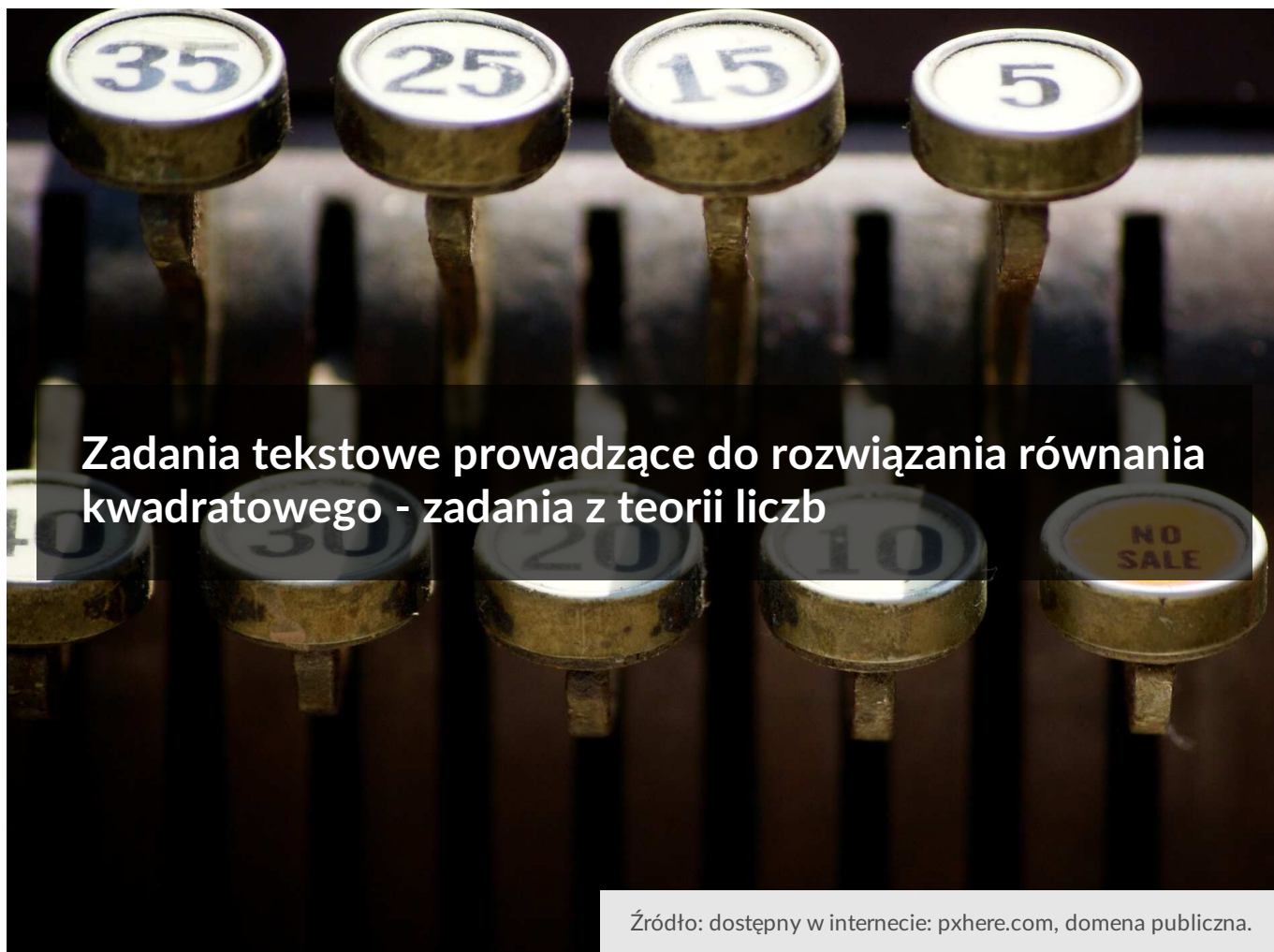




Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania kwadratowego - zadania z teorii liczb

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania równania kwadratowego - zadania z teorii liczb

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Słownik języka polskiego definiuje liczbę jako podstawowe pojęcie matematyczne, którego treścią jest wynik liczenia, wyrażane najczęściej za pomocą cyfr.

Encyklopedia PWN mówi natomiast, że liczba to w matematyce abstrakcyjne pojęcie, pierwotnie służące do określania liczebności zbiorów przedmiotów (liczby naturalne), a następnie do wyrażania wielkości ciągłych, jak: długość, pole powierzchni, objętość, ciężar (liczby wymierne), po raz pierwszy używane w Egipcie w XVII wieku p.n.e.

W tym dziale zajmiemy się zapisywaniem i rozwiązywaniem równań kwadratowych opisujących zależności między liczbami.

Twoje cele

- Zapiszesz wyrażenia algebraiczne przedstawiające zależności między liczbami.
- Zapiszesz i rozwiążesz równanie kwadratowe opisujące dane zależności między liczbami.

Przeczytaj

Przykład 1

Suma kwadratów trzech kolejnych **liczb nieparzystych** naturalnych jest równa 515. Wyznamy te liczby.

Zapiszemy i rozwiążemy równanie opisujące powyższą sytuację.

$$(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 = 515 \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

$$4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25 = 515$$

$$12n^2 + 36n = 480$$

$$n^2 + 3n - 40 = 0$$

$$\Delta = 3^2 + 40 \cdot 4 = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13$$

$$n_1 = \frac{-3-13}{2} = -8 \notin \mathbb{N}$$

$$n_2 = \frac{-3+13}{2} = 5 \in \mathbb{N}$$

$$2n + 1 = 11$$

$$2n + 3 = 13$$

$$2n + 5 = 15$$

Szukane liczby to 11, 13, 15.

Przykład 2

Wyznamy cztery kolejne liczby naturalne takie, że różnica kwadratów czwartej i trzeciej liczby jest o 124 mniejsza od sumy kwadratów pierwszej i drugiej liczby.

Kolejne liczby naturalne to: $n, n + 1, n + 2, n + 3$ dla $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Zatem: } (n + 3)^2 - (n + 2)^2 + 124 = n^2 + (n + 1)^2.$$

$$n^2 + 6n + 9 - n^2 - 4n - 4 + 124 = n^2 + n^2 + 2n + 1$$

$$2n^2 = 128$$

$$n^2 = 64$$

$$n = 8 \in \mathbb{N} \text{ lub } n = -8 \notin \mathbb{N}$$

Zatem cztery kolejne liczby naturalne to 8, 9, 10, 11.

Przykład 3

Liczbę 5 przedstawimy w postaci sumy dwóch liczb tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

Niech:

x – pierwsza liczba,

$5 - x$ – druga liczba.

Zapiszemy funkcję f określającą sumę kwadratów liczb.

$$f(x) = x^2 + (5 - x)^2 = x^2 + 25 - 10x + x^2 = 2x^2 - 10x + 25$$

Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej przyjmowana jest dla

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

$$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

Aby suma kwadratów składników była najmniejsza, liczbę 5 przedstawiliśmy w postaci $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}$.

Przykład 4

Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 10. Jeżeli tę liczbę pomnożymy przez liczbę dwucyfrową, która powstała z tych samych cyfr co pierwsza liczba, ale zapisanych w odwrotnej kolejności to otrzymamy 2701. Wyznamy tę liczbę.

Niech:

x – cyfra jedności początkowej liczby, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $10 - x$ – cyfra dziesiątek początkowej liczby,

$(10 - x) \cdot 10 + x$ – początkowa liczba,

$10x + (10 - x)$ – liczba o cyfrach zapisanych w odwrotnej kolejności.

Zapiszemy równanie:

$$[(10 - x) \cdot 10 + x] \cdot [10x + (10 - x)] = 2701.$$

$$(100 - 10x + x)(10x + 10 - x) = 2701$$

$$(100 - 9x)(9x + 10) = 2701$$

$$900x + 1000 - 81x^2 - 90x - 2701 = 0$$

$$-81x^2 + 810x - 1701 = 0$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$\Delta = 100 - 84 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{10-4}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{10+4}{2} = 7$$

$$y_1 = 10 - x_1$$

$$y_1 = 10 - 3$$

$$y_1 = 7$$

$$y_2 = 10 - x_2$$

$$y_2 = 10 - 7$$

$$y_2 = 3$$

Liczby dwucyfrowe spełniające warunki zadania to 37 i 73.

Przykład 5

Dane są liczby a i b takie, że $2a - b = 3$. Dla jakich wartości a i b iloczyn tych liczb przyjmuje najmniejszą wartość?

$$2a - b = 3$$

$$b = 2a - 3$$

$$a \cdot b = a \cdot (2a - 3) = 2a^2 - 3a$$

Czyli funkcja zmiennej a opisująca iloczyn liczb spełniających warunki zadania to:

$$f(a) = 2a^2 - 3a, a \in R.$$

Funkcja kwadratowa przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie a_w .

$$a_w = \frac{-b}{2a}$$

$$a_w = \frac{3}{4}$$

$$b = 2 \cdot \frac{3}{4} - 3 = \frac{3}{2} - 3 = -1\frac{1}{2}$$

$$\text{Zatem } a = \frac{3}{4}, b = -1\frac{1}{2}.$$

Słownik

liczba nieparzysta

liczba postaci $2n + 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj infografikę i zapoznaj się ze sposobem rozwiązania zadania o liczbach.

Polecenie 2

Zaznacz poprawną odpowiedź. W trzycyfrowej liczbie naturalnej cyfra setek jest taka sama jak cyfra jedności, zaś cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry setek. Jeżeli od liczby trzycyfrowej odejmiemy kwadrat sumy cyfr tej liczby to otrzymamy 232. Szukana liczba trzycyfrowa to:

☐ 242

☐ 575

☐ 464

☐ 353

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Suma kwadratów trzech kolejnych parzystych liczb naturalnych jest równa 596. Wybierz wszystkie równania opisujące powyższą sytuację, jeżeli $2n$, $n \in \mathbb{N}$ jest najmniejszą liczbą parzystą.

☐ $(2n - 2)^2 + (2n)^2 + (2n + 2)^2 = 576$

☐ $12n^2 - 20n - 576 = 0$

☐ $(2n)^2 + (2n + 2)^2 + (2n + 4)^2 = 596$

☐ $12n^2 + 24n - 576 = 0$

☐ $3n^2 + 6n - 144 = 0$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Trzy kolejne liczby nieparzyste, których suma kwadratów jest równa 1091 to:

☐ 19, 21, 23

☐ 15, 17, 19

☐ 13, 15, 17

☐ 17, 19, 21

Ćwiczenie 3



Dane są cztery kolejne liczby naturalne x , $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ dla $x \in \mathbb{N}$, takie, że różnica kwadratów trzeciej i drugiej liczby jest o 54 mniejsza od sumy kwadratów pierwszej i czwartej liczby. Wybierz i wstaw taki jednomian, aby rozwiązując równanie obliczyć najmniejszą liczbę naturalną spełniającą warunki zadania.

$$x^2 + \boxed{} - 24 = 0$$

Ćwiczenie 4



Liczbę 8 przedstaw w postaci sumy dwóch liczb tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

Liczby te to:

☐ 4 i 4☐ 2 i 6☐ 5 i 3☐ 3 i 5

Ćwiczenie 5



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Suma dwóch liczb jest równa 10. Najmniejsza wartość podwojonej sumy kwadratów tych liczb to: .

Ćwiczenie 6



Jeżeli liczbę dwucyfrową o sumie cyfr równej 6 pomnożymy przez liczbę dwucyfrową o tych samych cyfrach, ale zapisanych w odwrotnej kolejności to otrzymamy liczbę 765.

Wskaż liczbę spełniającą warunki zadania.

☐ liczba 42

☐ tylko liczba 51

☐ tylko liczba 15

☐ liczba 51 i 15

Ćwiczenie 7



Kwadrat sumy dwóch kolejnych liczb parzystych jest o 480 większy od kwadratu większej liczby.

Wpisz szukane liczby w kolejności rosnącej:

1 liczba: .

2 liczba: .

Ćwiczenie 8



Suma cyfr pewnej trzycyfrowej liczby jest równa 8, zaś suma kwadratów jej cyfr jest równa 30. Jeżeli w szukanej liczbie zamienimy cyfrę setek z cyfrą dziesiątek, a cyfrę jedności zostawimy bez zmian, to otrzymana liczba będzie o 90 większa od początkowej liczby. Wyznacz początkową liczbę.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania równania kwadratowego – zadania z teorii liczb

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje wyrażenia algebraiczne przedstawiające zależności między liczbami
- zapisuje i rozwiązuje równanie kwadratowe opisujące dane zależności między liczbami
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji
- analizuje podane warunki i buduje na ich podstawie odpowiednie równanie

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda wędrujących plakatów
- dyskusja

- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrany przez nauczyciela uczeń przypomina definicję równania kwadratowego i podaje przykłady opisu równania za pomocą metody słownej, a uczniowie zapisują odpowiedni wzór funkcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4 osobowych pracują metodą wędrujących plakatów. Celem jest przypomnienie zapisu wyrażeń algebraicznych opisujących liczby podzielne przez 2 i niepodzielne przez 2.
Rozpoczyna grupa wybrana losowo – zapisuje na kartonie za pomocą wyrażeń algebraicznych cztery kolejne liczby podzielne przez 2. Kolejna grupa podaje przykład zastosowania tych wyrażeń w konkretnym zadaniu. Plakat wędruje do następnej grupy, która dopisuje kolejne cztery liczby niepodzielne przez 2 itd. W ten sposób uczniowie przypominają poznane wcześniej sposoby zapisu liczb.
2. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zapisane w sekcji Przeczytaj i następnie wspólnie wyjaśniają wątpliwości, jakie ewentualnie im się nasunęły.
3. Uczniowie w parach oglądają infografikę i następnie omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące metod rozwiązywania zadań i analizy zadań o liczbach prowadzących do rozwiązywania równań kwadratowych.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Omawia ewentualne problemy, które powstały podczas rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.

Praca domowa:

Uczniowie dobierają się w pary i tworzą dla drugiej osoby zadania analogiczne do zadań 6 i 7 z części „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Polecenia pod infografiką można wykorzystać jako samodzielną pracę w domu lub w czasie zajęć pokazujących zastosowanie wzorów skróconego mnożenia.