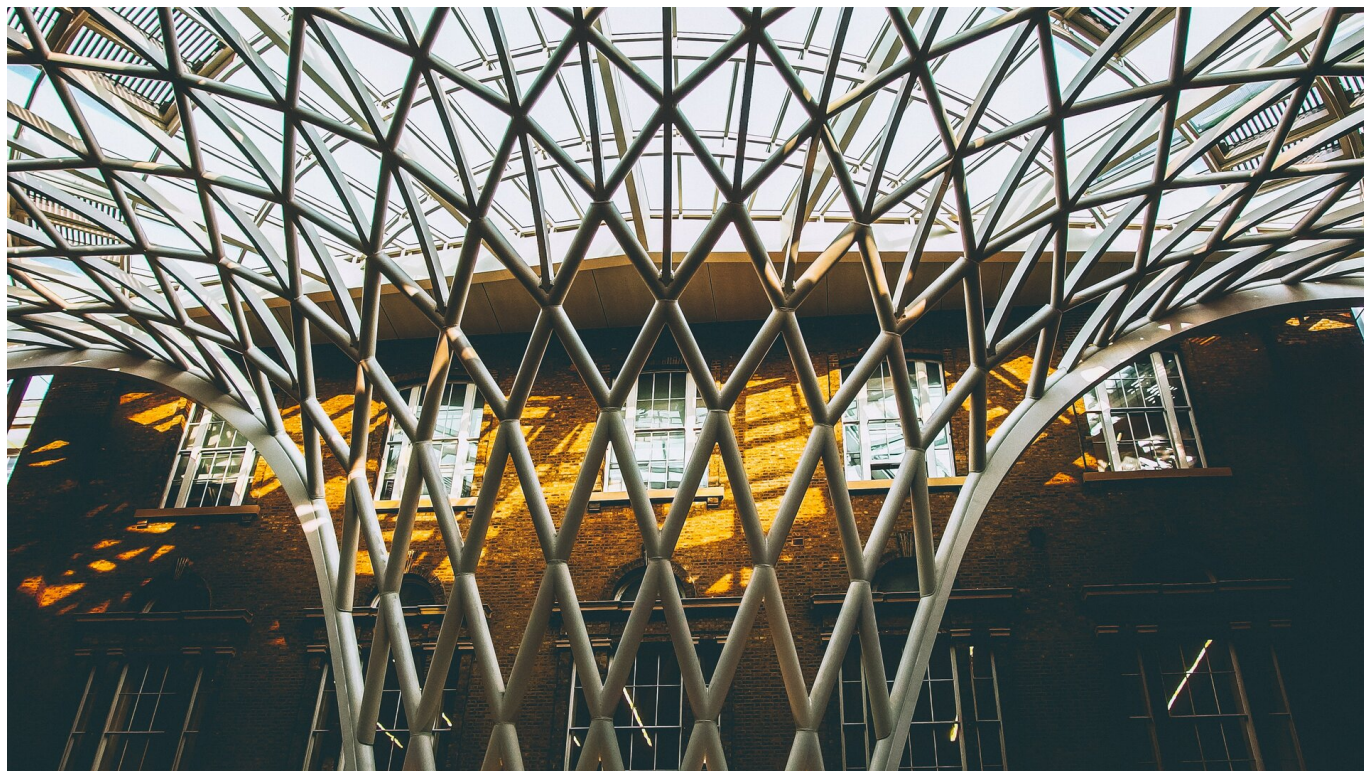
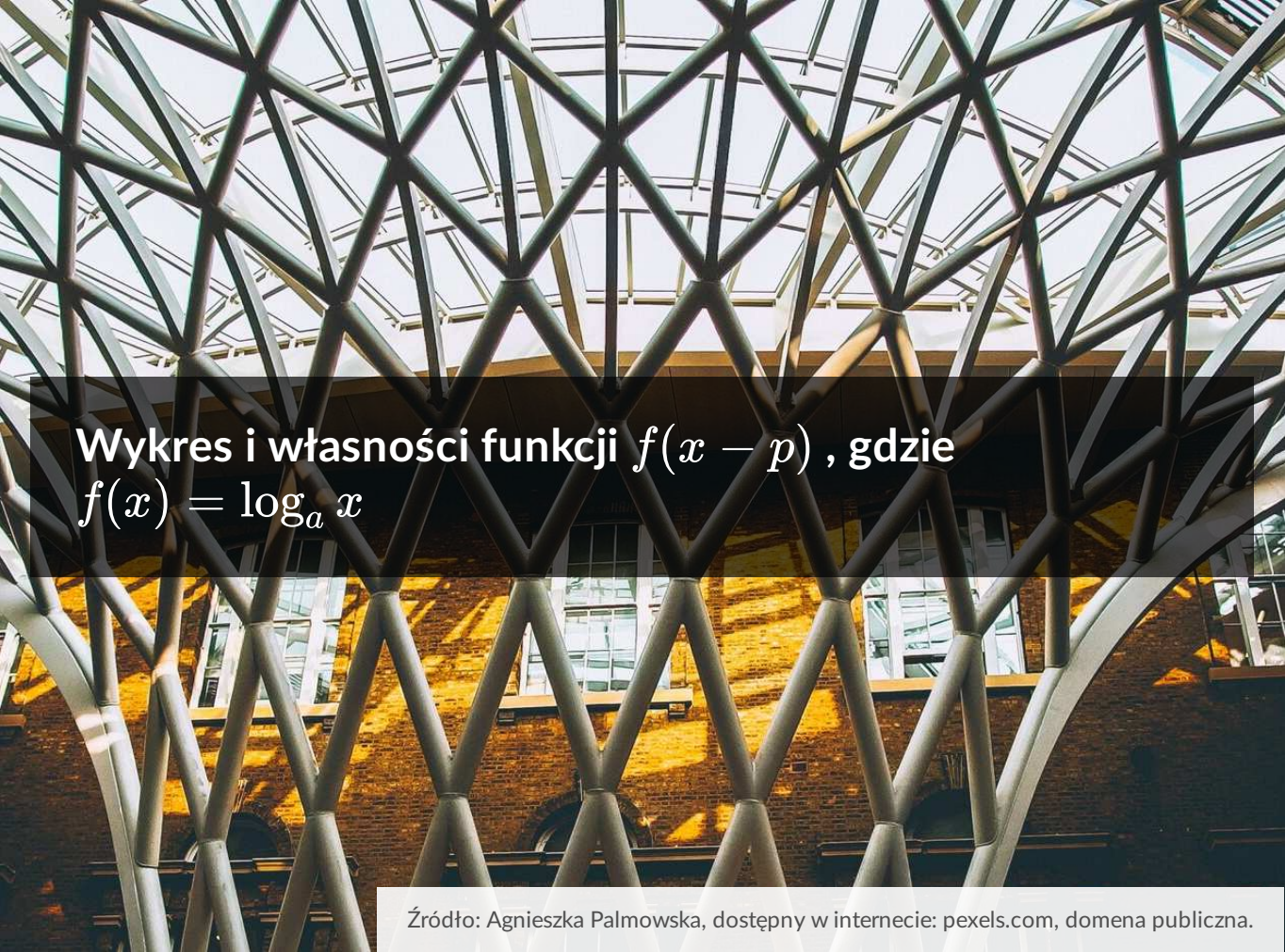




Wykres i własności funkcji $f(x - p)$, gdzie $f(x) = \log_a x$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykres i własności funkcji $f(x - p)$, gdzie $f(x) = \log_a x$

Źródło: Agnieszka Palmowska, dostępny w internecie: pexels.com, domena publiczna.

W tym materiale omówimy wiadomości dotyczące wykresu i własności funkcji logarytmicznej po przesunięciu w prawo lub w lewo wzdłuż osi odciętych. Dowiemy się, w którym miejscu po przesunięciu znajdzie się asymptota wykresu funkcji oraz jaki ma to wpływ na wartość miejsca zerowego funkcji. Będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne, bazując na części teoretycznej materiału i podanych przykładach.

Twoje cele

- Określisz własności wykresu funkcji logarytmicznej po przesunięciu wzdłuż osi X .
- Naszkicujesz wykres funkcji logarytmicznej po przesunięciu w prawo lub w lewo wzdłuż osi odciętych.
- Sprawdzisz, czy dany punkt należy do wykresu funkcji logarytmicznej.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przekształcanie wykresu funkcji jest ściśle powiązane nie tylko ze zmianą położenia wykresu tej funkcji, ale także zmianą jej własności.

W materiale omówimy przesunięcie wykresu funkcji logarytmicznej określonej wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ oraz $x > 0$ wzdłuż osi X układu współrzędnych.

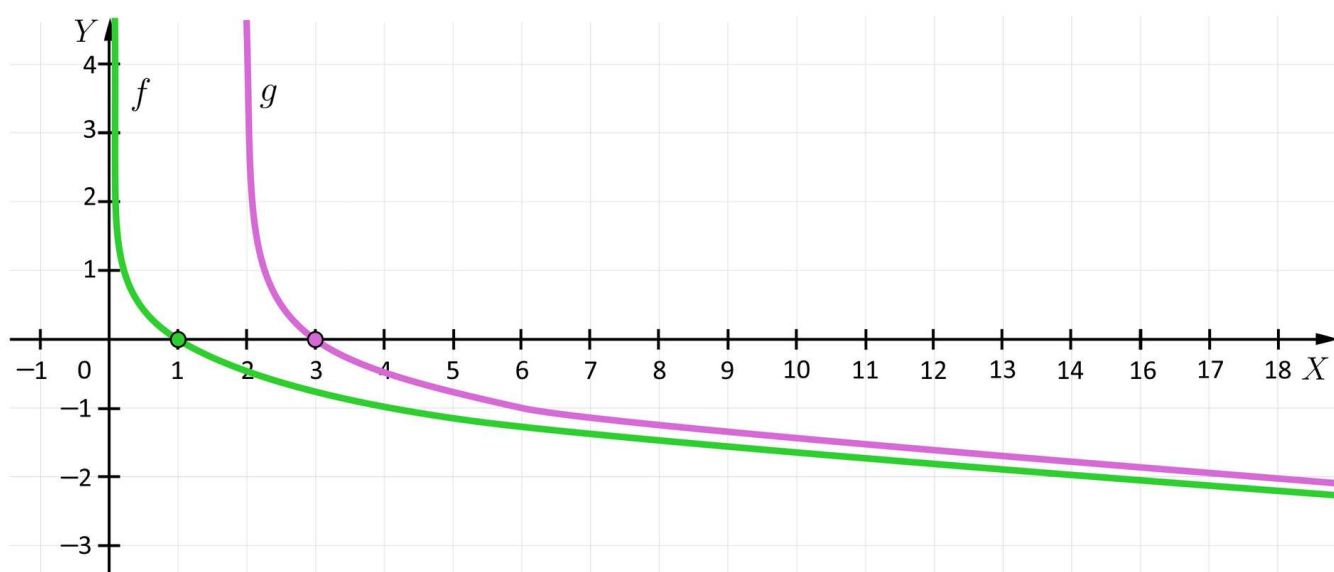
Definicja: przesunięcie wykresu funkcji logarytmicznej wzdłuż osi X

Wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = \log_a(x - p)$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$ o p jednostek w prawo ($p > 0$) lub o p jednostek w lewo ($p < 0$).

Naszkicujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji określonych wzorami $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ oraz $g(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x - 2)$. W tym celu w tabelach przedstawimy wartości tych funkcji dla kilku argumentów.

x	$\frac{1}{4}$	1	4	16
$f(x)$	1	0	-1	-2
x	$\frac{9}{4}$	3	6	18
$g(x)$	1	0	-1	-2

Wykresy tych funkcji przedstawiają się następująco:



Analizując położenie wykresów oraz wzory tych funkcji możemy zauważyć, że:

- wykres funkcji g możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w prawo,
- dziedziną funkcji f jest zbiór $x \in (0, \infty)$, a dziedziną funkcji g jest zbiór $x \in (3, \infty)$,
- miejscem zerowym funkcji f jest 1, a miejscem zerowym funkcji g jest 3,
- asymptotą wykresu funkcji f jest prosta $x = 0$, a asymptotą wykresu funkcji g jest prosta $x = 2$.
- funkcja f przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów większych od 1, a funkcja g przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów większych od 3,
- funkcja f przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów $x \in (0, 1)$, a funkcja g przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów $x \in (2, 3)$.

Twierdzenie: Miejsce zerowe funkcji $f(x) = \log_a(x - p)$

Miejscem zerowym funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_a(x - p)$ jest liczba $x = p + 1$.

Dowód:

Dziedziną tej funkcji jest zbiór wszystkich liczb spełniających nierówność $x - p > 0$, więc $x > p$.

Miejscem zerowym funkcji nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji wynosi 0.

W celu wyznaczenia miejsca zerowego rozwiązujemy równanie:

$$0 = \log_a(x - p)$$

Zatem $x - p = a^0$, czyli $x = p + 1$.

Funkcja przed i po przekształceniu jej wykresu w przesunięciu wzdłuż osi odciętych ma ten sam zbiór wartości oraz nie zmienia się jej monotoniczność.

Własność: asymptota wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_a(x - p)$

Asymptotą wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_a(x - p)$ jest prosta o równaniu $x = p$.

Mając dany wzór [funkcji logarytmicznej](#) oraz [przesunięcie wzdłuż osi \$X\$](#) układu współrzędnych, możemy wyznaczyć wzór tej funkcji po przekształceniu jej wykresu.

Przykład 1

Wyznamy wzory funkcji po przesunięciu ich wykresów wzdłuż osi X :

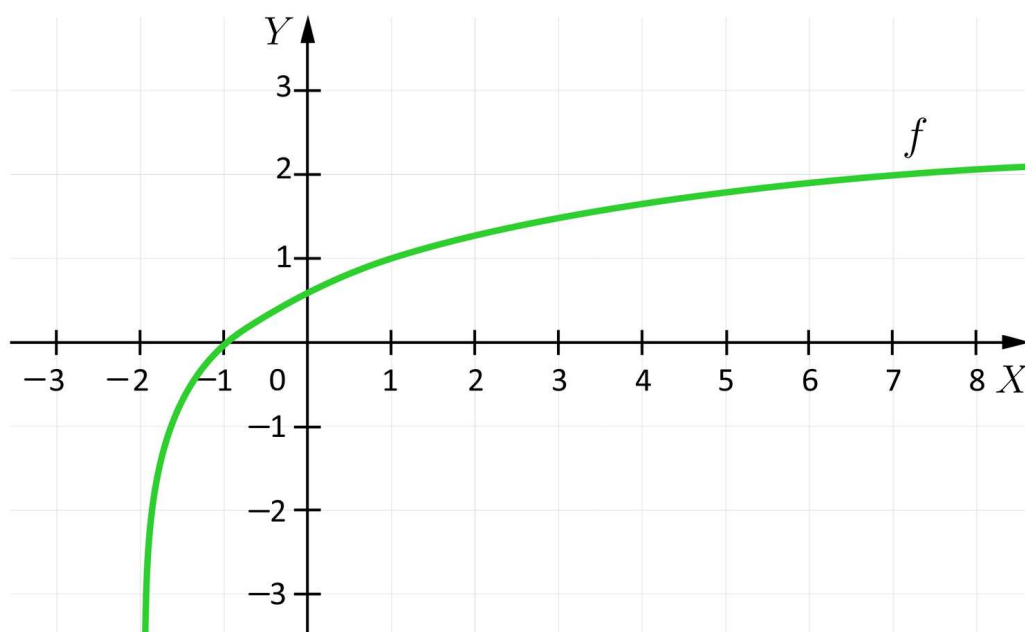
- funkcja określona wzorem $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$ po przesunięciu jej wykresu o 3 jednostki w lewo wyraża się wzorem $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(x + 3)$,

- funkcja określona wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ po przesunięciu jej wykresu o 4 jednostki w prawo wyraża się wzorem $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 4)$.

Przesunięcie poziome wzdłuż osi odciętych wykresu funkcji logarytmicznej powoduje zmianę położenia asymptoty jej wykresu, co ma wpływ na zmianę różnych własności tej funkcji.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_3(x + 2)$.



Odczytamy z wykresu:

- dziedzinę tej funkcji,
- równanie asymptoty wykresu tej funkcji,
- miejsce zerowe tej funkcji,

Rozwiązania:

- Dziedziną tej funkcji jest zbiór $x \in (-2, \infty)$.
- Asymptotą wykresu funkcji jest prosta o równaniu $x = -2$.
- Z wykresu możemy odczytać, że miejscem zerowym tej funkcji jest liczba (-1) .

Bez rysowania wykresu funkcji logarytmicznej, tylko na podstawie podanego wzoru tej funkcji, możemy określić różne jej własności.

Przykład 3

Określmy funkcję f wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$. Wyznaczymy:

- a) równanie asymptoty wykresu tej funkcji,
- b) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
- c) wartość funkcji dla argumentu 9.

Rozwiązania:

a) Asymptotą wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = 1$, ponieważ wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$ otrzymujemy przez przesunięcie wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ o 1 jednostkę w prawo.

b) Wyznaczymy najpierw miejsce zerowe tej funkcji. W tym celu rozwiążemy równanie:

$$0 = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1), \text{ zatem } \left(\frac{1}{2}\right)^0 = x - 1, \text{ czyli } x = 2.$$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $x \in (1, \infty)$.

Każda funkcja określona wzorem $f(x) = \log_a x$, gdy $a \in (0, 1)$ jest malejąca, zatem funkcja f przyjmuje wartości ujemne dla argumentów większych od 2.

$$\text{c) } f(9) = \log_{\frac{1}{2}}(9 - 1) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

Przykład 4

Do wykresu funkcji logarytmicznej określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + p)$ należy punkt o współrzędnych $(8, -2)$. Wyznaczymy wzór tej funkcji, miejsce zerowe oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

W celu wyznaczenia wartości parametru rozwiązujemy równanie:

$$-2 = \log_{\frac{1}{3}}(8 + p), \text{ zatem } p = 1.$$

Wzór funkcji zapiszemy zatem w postaci:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 1).$$

Dla wyznaczenia miejsca zerowego rozwiązujemy równanie:

$$0 = \log_{\frac{1}{3}}(x + 1).$$

Zatem miejscem zerowym tej funkcji jest liczba 0.

Funkcja jest malejąca, a jej dziedziną jest zbiór $x \in (-1, \infty)$, miejscem zerowym 0, zatem funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału $(-1, 0)$.

Słownik

funkcja logarytmiczna

funkcja określona wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ oraz $x > 0$

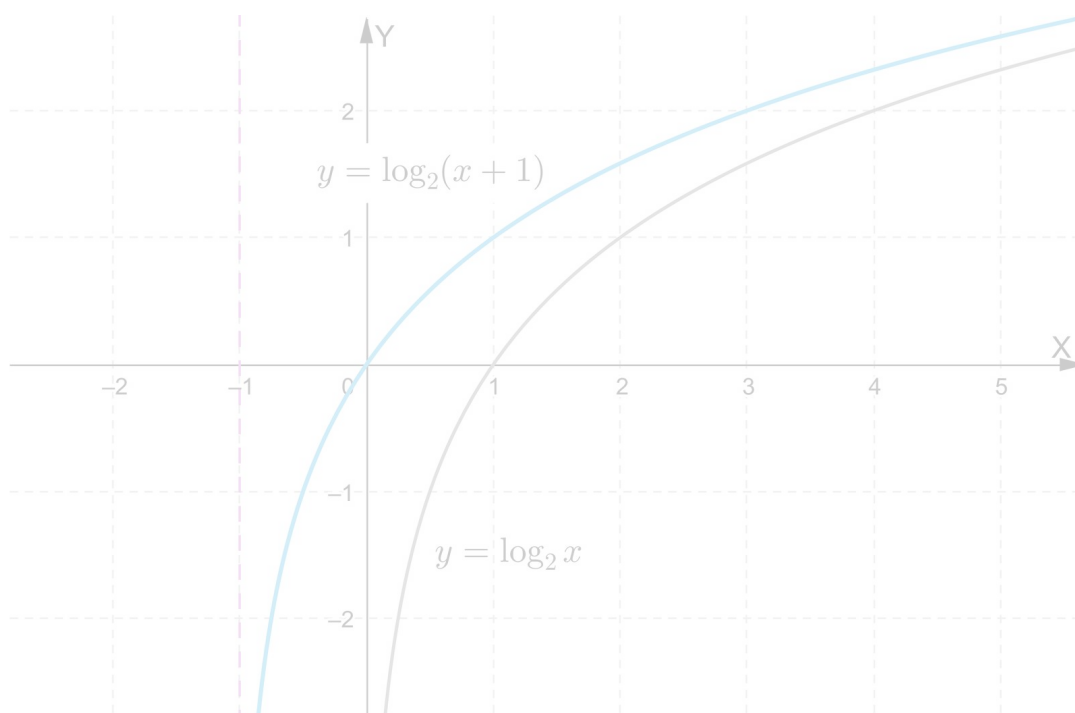
przekształcenie wykresu funkcji $f(x - p)$

przesunięcie wykresu funkcji $f(x)$ o p jednostek w prawo ($p > 0$) lub o p jednostek w lewo ($p < 0$)

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet dotyczący przekształcania wykresu funkcji logarytmicznej poprzez przesunięcia wzdłuż osi odciętych układu współrzędnych. Zwróć uwagę, które własności funkcji logarytmicznej ulegają zmianie. Za każdym razem określ miejsce zerowe tej funkcji oraz podaj równanie asymptoty wykresu tej funkcji.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D8SCUJp4p>

Polecenie 2

Do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_a(x + 2)$ należy punkt o współrzędnych $(\frac{1}{4}, -2)$:

a) wyznacz wzór tej funkcji,

b) dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_2 x$ przesunięto o p jednostek w lewo i otrzymano wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = \log_2(x + 4)$. Wtedy wartość p wynosi:

☐ 4

☐ -2

☐ -4

Ćwiczenie 2



Pogrupuj własności wykresu funkcji podanych za pomocą poniższych wzorów.

Własności wykresu funkcji określonej wzorem
 $f(x) = \log_3(x - 1)$:

Własności wykresu funkcji określonej wzorem
 $f(x) = \log_3(x + 2)$:

funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów większych od 2

asymptotą wykresu funkcji jest prosta $x = -2$

miejscem zerowym jest liczba (-1)

funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów większych od (-1)

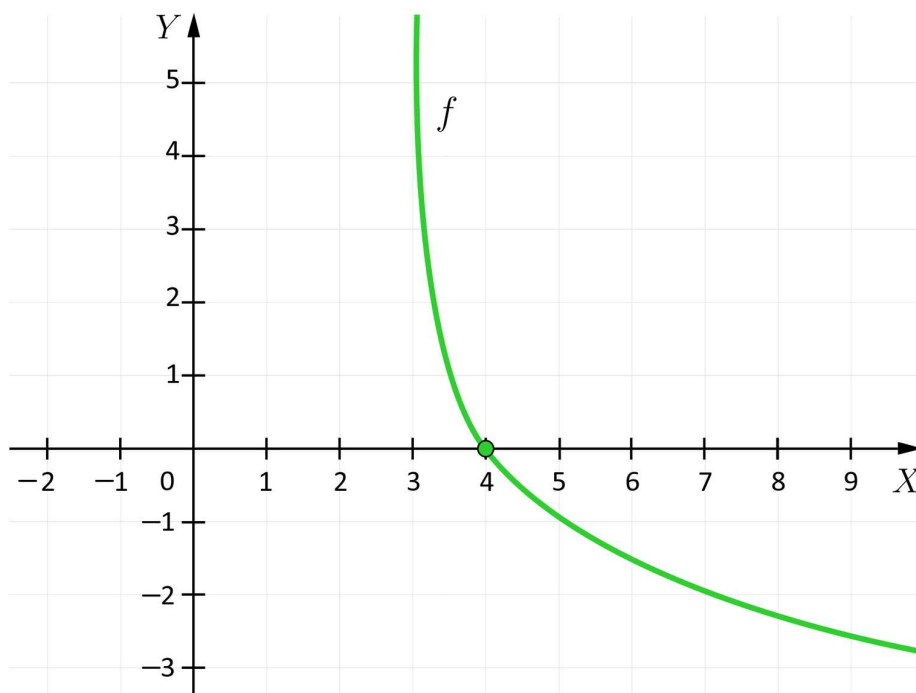
miejscem zerowym jest liczba 2

asymptotą wykresu funkcji jest prosta $x = 1$

Ćwiczenie 3



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 3)$.



Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐ Miejscem zerowym funkcji jest liczba 3.

☐ Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla argumentów mniejszych od 4.

☐ Asymptotą wykresu funkcji jest prosta $x = 3$.

☐ Do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych $(7, -1)$.

Ćwiczenie 4



Połącz w pary wzór funkcji oraz zbiór, dla którego funkcja określona tym wzorem przyjmuje wartości ujemne:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(2x - 3)$$

$$x \in (1, \infty)$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$$

$$x \in (2, \infty)$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$$

$$x \in (-\infty, -2)$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x - 1)$$

$$x \in (3, \infty)$$

Ćwiczenie 5



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Określmy wzorem funkcję logarytmiczną $f(x) = \log x$. Niech $g(x) = f(x - 2)$. Wstaw odpowiednie wartości funkcji g dla podanych argumentów:

$$g\left(\frac{21}{10}\right) = \boxed{}$$

$$g(12) = \boxed{}$$

$$g(3) = \boxed{}$$

Ćwiczenie 6



Połącz w pary wzór funkcji z równaniem asymptoty jej wykresu.

$$f(x) = \log_2(x - 3)$$

$$x = -2$$

$$f(x) = \log_3(x - 2)$$

$$x = -3$$

$$f(x) = \log_4(x + 2)$$

$$x = 3$$

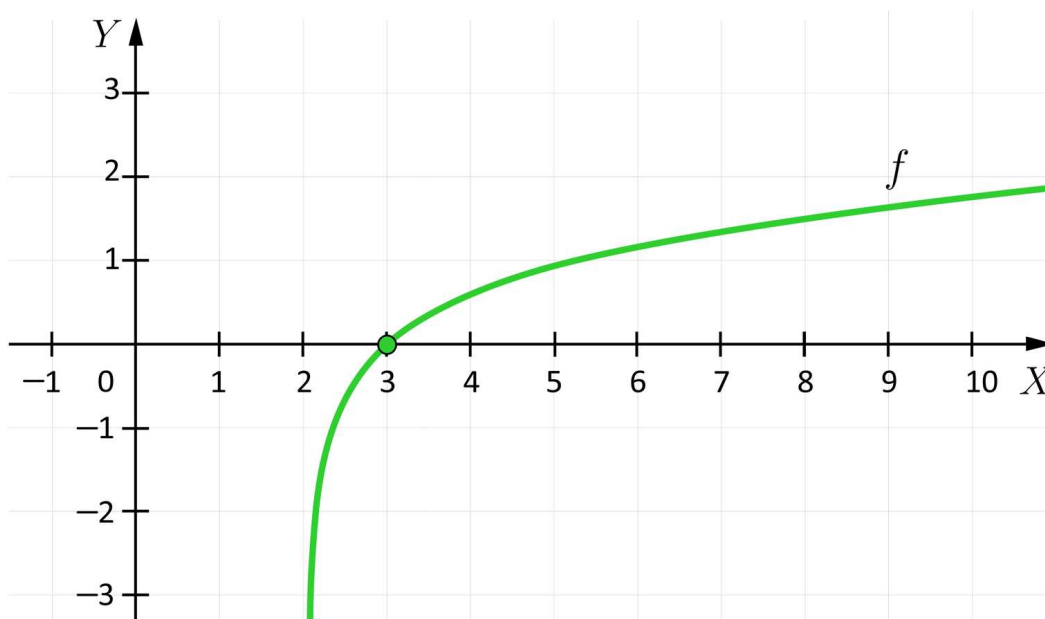
$$f(x) = \log_5(x + 3)$$

$$x = 2$$

Ćwiczenie 7



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_3(x - 2)$.



Uzupełnij zdania.

Asymptotą wykresu funkcji jest prosta $x =$.

Funkcja przyjmuje wartość 1 dla argumentu .

Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla argumentów z przedziału (, 3).

Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$. Określmy funkcję g wzorem $g(x) = f(x + 1)$:

a) podaj wzór funkcji g ,

b) podaj miejsce zerowe oraz równanie asymptoty wykresu tej funkcji,

c) naszkicuj wykres tej funkcji.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres i własności funkcji $f(x - p)$, gdzie $f(x) = \log_a x$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca wykresy funkcji logarytmicznych w przesunięciu wzdłuż osi odciętych układu współrzędnych;
- odczytuje własności funkcji logarytmicznej na podstawie wzoru i wykresu;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- objaśnienie nowej wiedzy;
- z użyciem e-podręcznika;
- metoda krokodyła.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do Internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Wykres i własności funkcji $f(x - p)$, gdzie $f(x) = \log_a x$ ” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie omawiają te treści z całą klasą. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości. W razie potrzeby uczniowie korzystają z e-podręcznika.
2. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 z części „Aplet”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia od 1 do 5 z części „Sprawdź się”, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie rozwiązują zadania indywidualnie wykonując ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami. W razie potrzeby uzupełnia informacje.
5. Uczniowie indywidualnie układają i rozwiązują zadania do omawianego tematu. Mogą wymieniać się zadaniami. Praca przebiega metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji

„Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy funkcji specjalnych i ich własności](#)

Wskazówki metodyczne:

- Praca uczniów podczas lekcji podlega ocenie. W ocenie nauczyciel powinien wziąć pod uwagę wkład pracy oraz pomysłowość uczniów. Lekcję można zakończyć ankietą ewaluacyjną dotyczącą celów kształcenia.