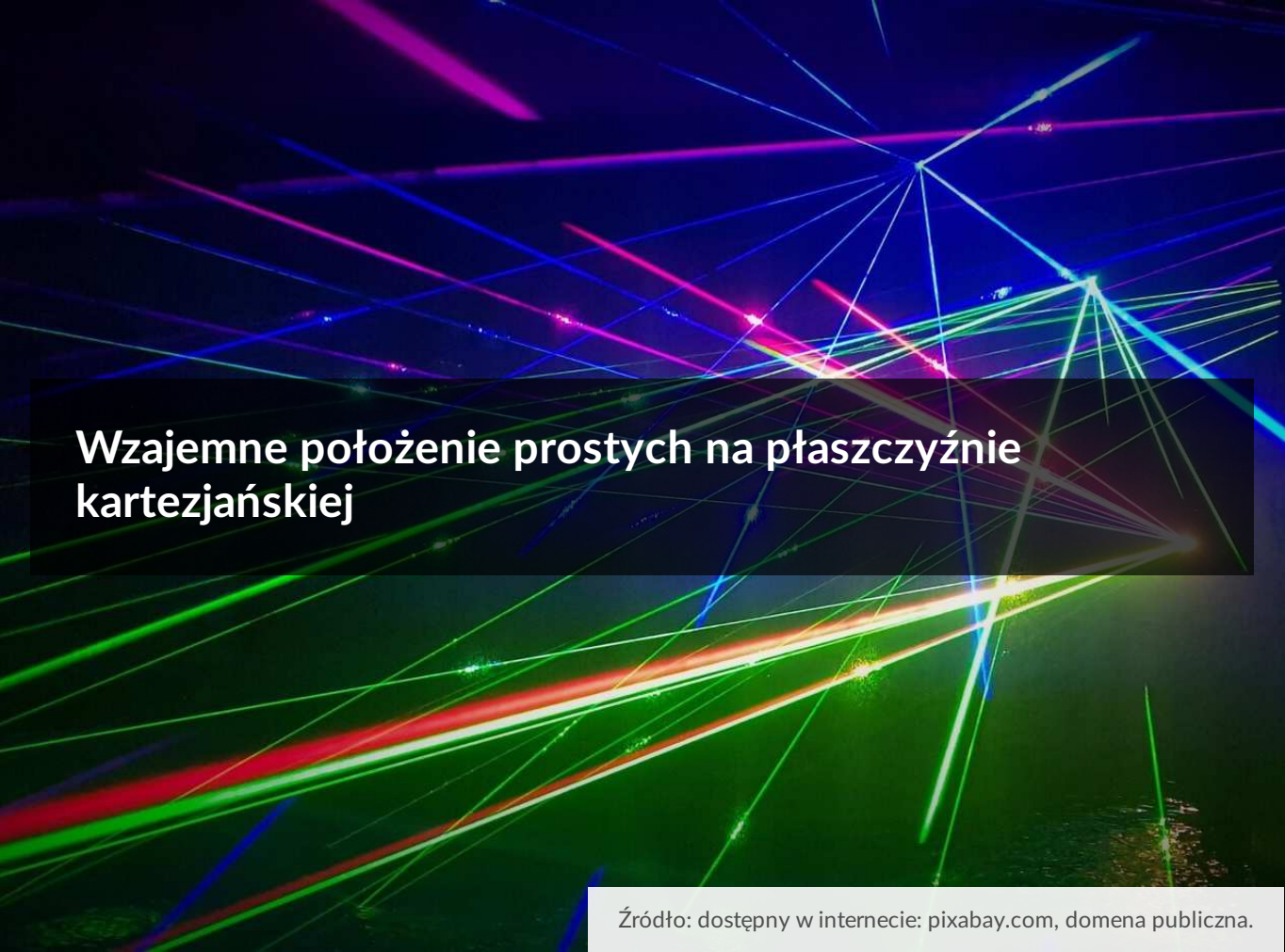




Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tej lekcji zajmiemy się badaniem wzajemnego położenia prostych umieszczonych w prostokątnym układzie współrzędnych, które opisane są równaniami kierunkowymi lub ogólnymi. W tym celu będziemy rozważać odpowiednie układy równań i ich rozwiązania.

Twoje cele

- Określisz wzajemne położenie prostych na podstawie ich równań.
- Odczytasz współrzędne punktu przecięcia prostych z ich ilustracji.
- Wyznaczysz wartości parametru, aby spełniony był zadany z góry warunek.

Przeczytaj

Rozważmy proste, które można opisać równaniami kierunkowymi $y = ax + b$ i $y = cx + d$, czyli żadna z nich nie jest równoległa do osi Y . Wówczas ich wzajemne położenie możemy określić, rozważając układ równań

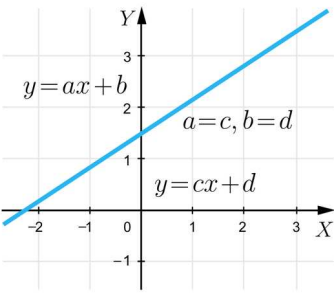
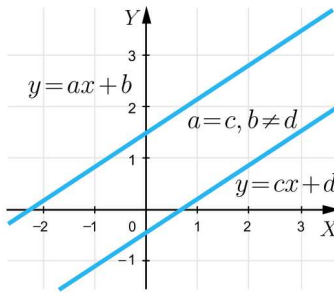
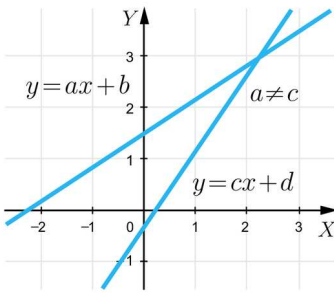
$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

z którego wynika równanie

$$ax + b = cx + d$$

$$(a - c)x = d - b.$$

Mogą zachodzić następujące przypadki:

$a - c = 0$		$a - c \neq 0$
$d - b = 0$	$d - b \neq 0$	
Równanie tożsamościowe - jest spełnione przez każdą liczbę $x \in R$	Równanie sprzeczne - nie istnieje liczba x , która je spełnia	$x = \frac{d - b}{a - c}$
Dla każdego $x \in R$ możemy wyznaczyć $y = ax + b$		$y = a \cdot \frac{d - b}{a - c} + b = \frac{ad - ab + ab - bc}{a - c} = \frac{ad - bc}{a - c}$
Proste mają nieskończenie wiele punktów wspólnych o współrzędnych postaci $(x; ax + b)$	Proste nie mają punktów wspólnych - są równoległe, ale się nie nakładają	Proste mają dokładnie jeden punkt wspólny o współrzędnych $\left(\frac{d - b}{a - c}; \frac{ad - bc}{a - c}\right)$
		

Zatem dwie proste opisane równaniami kierunkowymi mogą mieć:

- dokładnie jeden punkt wspólny, gdy mają różne współczynniki kierunkowe,
- nieskończenie wiele punktów wspólnych, gdy mają równe współczynniki kierunkowe i równe wyrazy wolne,
- zero punktów wspólnych, gdy mają równe współczynniki kierunkowe i różne wyrazy wolne.

Podobną analizę możemy przeprowadzić dla prostych opisanych równaniami ogólnymi, które obejmują również **proste równoległe** do osi Y .

Aby określić wzajemne położenie prostych o równaniach $Ax + By = C$, gdzie A i B nie są jednocześnie równe zero, oraz $Dx + Ey = F$, gdzie D i E nie są jednocześnie równe zero, wystarczy rozważyć układ równań

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{cases}$$

Wyznamy x z pierwszego równania:

$$Ax = C - By$$

$$x = \frac{C - By}{A}$$

Podstawiając otrzymany wynik za x do drugiego równania, dostaniemy:

$$\frac{CD - BDy}{A} + Ey = F \quad | \cdot A$$

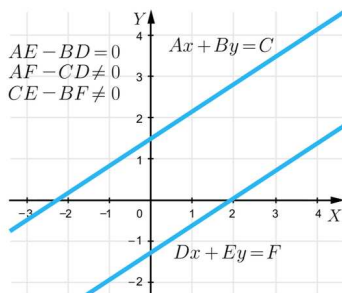
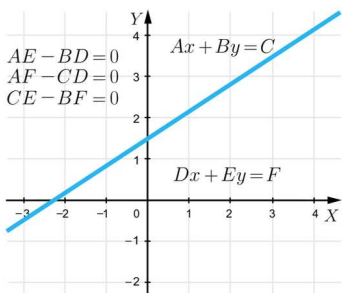
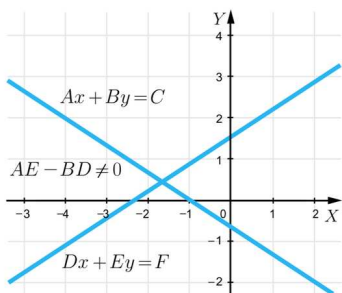
$$CD - BDy + AEy = AF.$$

Dochodzimy finalnie do prostego równania z niewiadomą y :

$$(AE - BD)y = AF - CD.$$

Analogiczne równanie możemy otrzymać dla niewiadomej x :

$$(AE - BD)x = CE - BF.$$

$AE - BD = 0$		$AE - BD \neq 0$
$AF - CD \neq 0$ lub $CE - BF \neq 0$	$AF - CD = 0$ i $CE - BF = 0$	
Równania są sprzeczne - układ nie ma rozwiązań	Równania są tożsamościowe - układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y) spełniających warunek $Ax + By = C$	Układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x = \frac{CE - BF}{AE - BD} \\ y = \frac{AF - CD}{AE - BD} \end{cases}$
Proste są równoległe - nie mają punktów wspólnych	Proste się nakładają	Proste przecinają się w jednym punkcie o współrzędnych $\left(\frac{CE - BF}{AE - BD}, \frac{AF - CD}{AE - BD} \right)$
		

Przykład 1

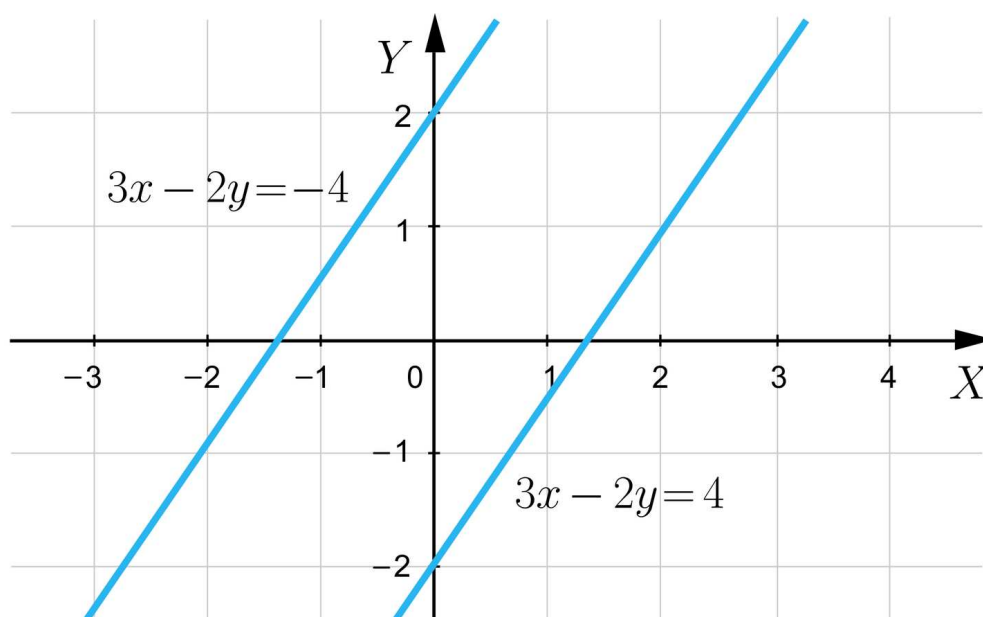
Określimy wzajemne położenie prostych o równaniach $3x - 2y = 4$ oraz $-6x + 4y = 8$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli podzielimy obie strony drugiego równania przez (-2) , otrzymamy równanie

$$3x - 2y = -4.$$

Ponieważ wyrażenie $3x - 2y$ nie może jednocześnie przyjąć wartości 4 i (-4) , więc układ złożony z podanych równań jest sprzeczny. Oznacza to, że proste są równoległe i nie mają punktów wspólnych.



Przykład 2

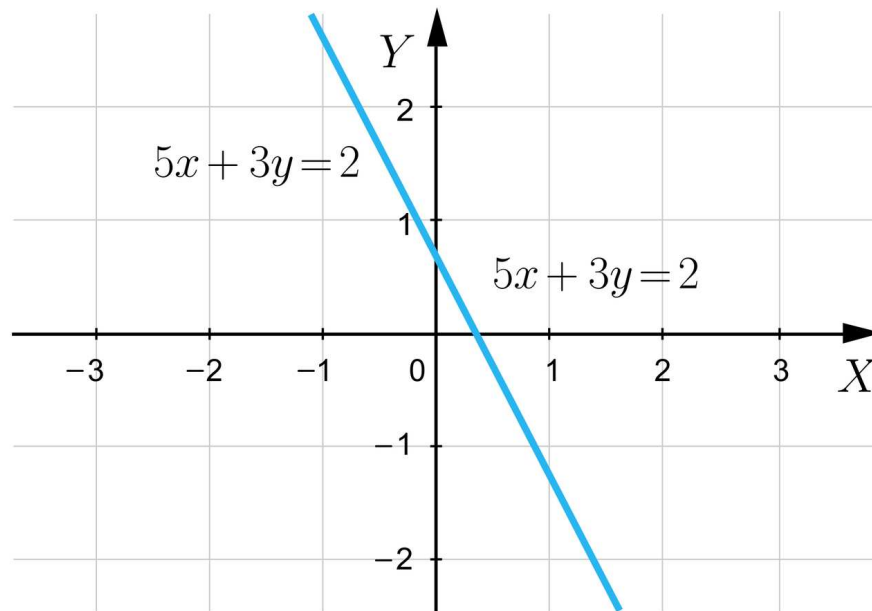
Zbadamy wzajemne położenie prostych o równaniach $5x + 3y = 2$ oraz $2, 5x + 1, 5x = 1$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli pomnożymy obie strony drugiego równania przez 2, to otrzymamy równanie

$$5x + 3y = 2.$$

Oznacza to, że oba równania opisują proste, które się nakładają (można też myśleć, że opisują tę samą prostą). Zatem każdy punkt o współrzędnych $(x; \frac{2-5x}{3})$ spełnia oba równania.



Przykład 3

Określimy wzajemne położenie prostych o równaniach $y = 2x - 3$ oraz $2x - 3y = 1$.

Rozwiązanie

W tym celu rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

Wynika z niego równanie

$$2x - 3(2x - 3) = 1.$$

Kolejne przekształcenia pozwalają wyznaczyć wartość niewiadomej x :

$$2x - 6x + 9 = 1$$

$$-4x = -8$$

$$x = 2.$$

Pozostało wyznaczyć wartość niewiadomej y :

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ -3y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Zatem proste o równaniach $y = 2x - 3$ oraz $2x - 3y = 1$ przecinają się w jednym punkcie o współrzędnych $(2; 1)$.

Przykład 4

Zbadamy wzajemne położenie prostych w zależności od wartości parametru m . Proste mają równania: $y = (m^2 - 1)x + 2$ oraz $y = 3x + m$.

Rozwiązanie

Obie proste opisane są równaniami kierunkowymi. Są one równoległe dokładnie wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, zatem

$$m^2 - 1 = 3,$$

czyli

$$m = 2 \text{ lub } m = -2.$$

Dla $m = 2$ otrzymujemy równania

$$y = 3x + 2 \text{ oraz } y = 3x + 2,$$

zatem proste opisane danymi równaniami pokrywają się.

Dla $m = -2$ otrzymujemy równania

$$y = 3x + 2 \text{ oraz } y = 3x - 2,$$

zatem proste opisane danymi równaniami są równoległe, ale się nie pokrywają.

Dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ otrzymujemy proste, które się przecinają.

Przykład 5

Zbadamy wzajemne położenie prostych w zależności od parametru m . Proste mają równania $mx + 2y = 1$ oraz $8x + my = -2$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy zestawienie zawarte w tabeli 2.

Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 8x + my = -2. \end{cases}$$

Przy oznaczeniach przyjętych w tabeli 2, mamy:

$$A = m, B = 2, C = 1, D = 8, E = m, F = -2.$$

Obliczmy teraz

$$AE - BD = m^2 - 16$$

$$CE - BF = m + 4$$

$$AF - CD = -4 - m = -(m + 4).$$

Jeśli $AE - BD = 0$ oraz $CE - BF = 0$ lub $AF - CD = 0$, to proste będą się nakładać, co dzieje się tylko dla $m = -4$.

Jeśli jednocześnie

$$AE - BD = 0,$$

$$CE - BF \neq 0,$$

$$AF - CD = 0,$$

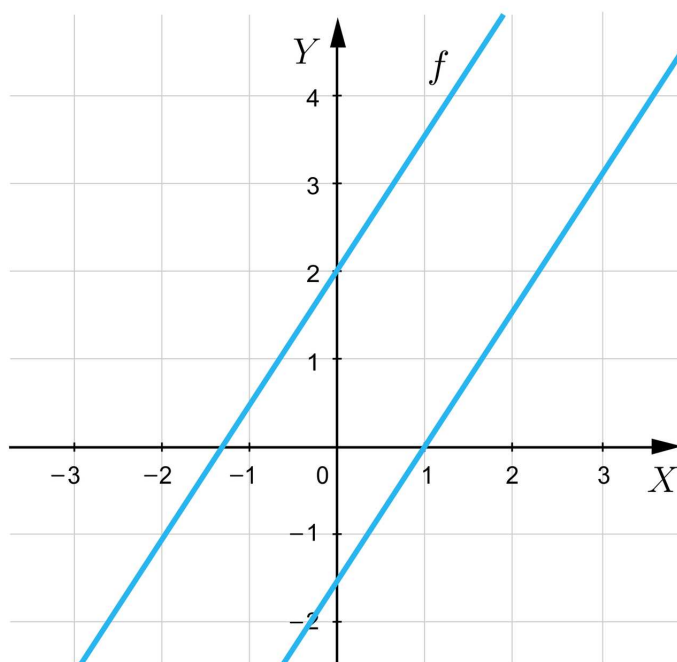
to proste będą równoległe, co dzieje się tylko dla $m = 4$.

Jeśli

$$AE - BD \neq 0,$$

wtedy będą to **proste przecinające się**, co dzieje się dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$.

Rozważmy proste narysowane poniżej



Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że proste są równoległe. W rzeczywistości ich równania to

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

oraz

$$y = \frac{149}{100}x - \frac{3}{2},$$

zaś ich punkt wspólny ma współrzędne $(-350; -523)$.

Zauważmy na podstawie powyższego przykładu, że nawet przy bardzo dokładnych wykresach, możemy pochopnie wyciągnąć wnioski o położeniu prostych, dlatego też warto zawsze poprzeć takie obserwacje obliczeniami. Skala rysunku pomocniczego ma duże znaczenie. Powinna być dopasowana do współczynników równania prostej. W tym przypadku, decydując się na dokładne narysowanie obu prostych o niewielkich współczynnikach, pomijamy duże wartości, przez co na rysunku nie jest umieszczony punkt przecięcia prostych.

Słownik

proste równoległe

proste, które nie mają punktów wspólnych lub się nakładają

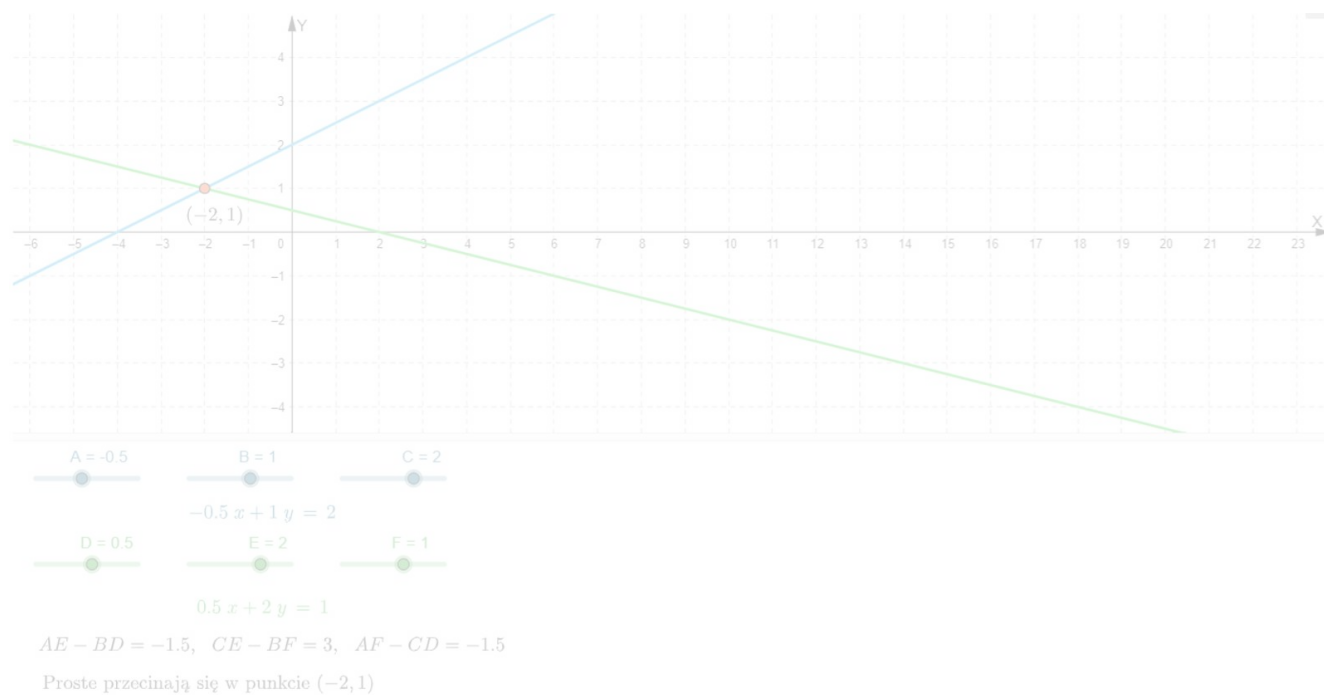
proste przecinające się

proste, które mają dokładnie jeden punkt wspólny

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Korzystając z symulacji interaktywnej, rozwiąż zadanie. Używając suwaków, zmieniaj wartość współczynników w równaniach prostych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D18C0zDG9>

Polecenie 2

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Proste o równaniach $3x - y = 5$ oraz $1,5x + 0,5y = -2,5$:	Proste o równaniach $2x - 4y = 3$ oraz $x - 2y = -1,5$:	Proste o równaniach $2x - y = 1$ oraz $x + 2y = 1$ przecinają się w punkcie o współrzędnych:	Dana jest prosta opisana równaniem $x - 2y = 3$. Równanie prostej równoległej do danej to:	Dana jest prosta opisana równaniem $x + 2y = 2$. Równanie prostej przecinającej daną prostą to:
przecinają się ☐	przecinają się ☐	$(\frac{3}{5}; \frac{1}{5})$ ☐	$0,5x - y = 1,5$ ☐	$x + 4y = 6$ ☐
nakładają się ☐	nakładają się ☐	$(\frac{1}{5}; \frac{3}{5})$ ☐	$1,5x - 3y = 4,5$ ☐	$x - 4y = 4$ ☐
są równoległe, ale się nie nakładają ☐	są równoległe, ale się nie nakładają ☐	$(0,6; 0,2)$ ☐	$-2x + 4y = 6$ ☐	$2x - 4y = -4$ ☐

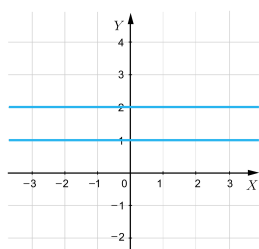
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

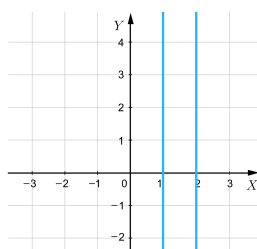
Ćwiczenie 1



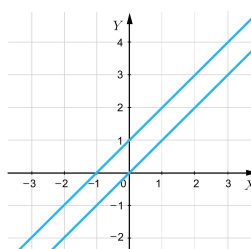
Na rysunkach przedstawione są pary prostych równoległych. Połącz równania tych prostych z odpowiednim rysunkiem.



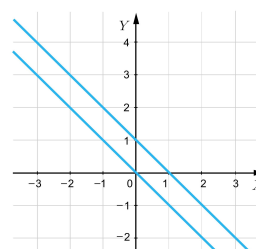
$$y = -x; y = -x + 1$$



$$y = 1; y = 2$$



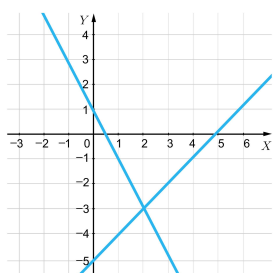
$$y = x; y = x + 1$$



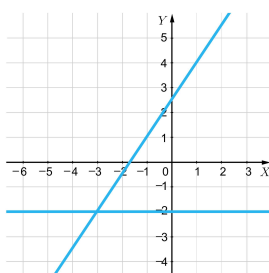
$$x = 1; x = 2$$

Ćwiczenie 2

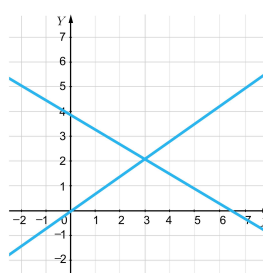
Odczytaj współrzędne punktu przecięcia narysowanych prostych wiedząc, że są one liczbami całkowitymi. Połącz w pary odpowiednie współrzędne z rysunkiem.



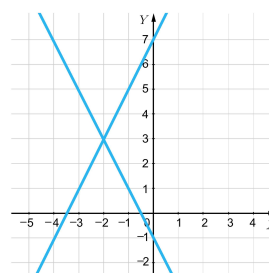
$$(-3; -2)$$



$$(2; -3)$$



$$(-2; 3)$$



$$(3; 2)$$

Ćwiczenie 3



Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Proste o równaniach $y = m^2x + 1$ oraz $y = x + m$ nie mają punktów wspólnych dla m równego:	Proste o równaniach $y = m^4x + 2$ oraz $y = 16x + m$ nakładają się dla m równego:	Proste o równaniach $y = m^2x - 3$ oraz $y = 9x + 2$ mają dokładnie jeden punkt wspólny dla:	Proste o równaniach $y = m^3x + 2$ oraz $y = 8x + m$ nie są równoległe dla:
nie istnieje m spełniające warunki zadania ☐	2 ☐	$m = \sqrt{3}$ ☐	$m = 2$ ☐
1 ☐	-2 ☐	$m = -\sqrt{3}$ ☐	$m = -2$ ☐
-1 ☐	nie istnieje m spełniające warunki zadania ☐	$m = 9$ ☐	$m = 8$ ☐

Ćwiczenie 4



Wskaż zdania prawdziwe.

☐

Proste o równaniach $y = mx + 3x + 3$ oraz $y = 2x + m$ przecinają się dla $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

☐

Proste o równaniach $y = (m + 1)^3x - x + 3m + 1$ i $y = 7x + m + 4$ mają nieskończenie wiele punktów wspólnych dla $m = 1$.

☐

Proste o równaniach $y = mx + 3x + 3$ oraz $y = 2x + m$ są równoległe dla $m = -1$.

☐

Proste o równaniach $y = m^2x + 3x - 5$ oraz $y = 4x + m - 7$ nie mają punktu wspólnego dla $m = 2$.

Ćwiczenie 5



Połącz w pary układy równań prostych z ich opisami.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

Proste się przecinają, ale nie są prostopadłe.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Proste są równoległe, ale się nie nakładają.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Proste się nakładają.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Proste są prostopadłe.

Ćwiczenie 6



Zbadaj wzajemne położenie prostych o równaniach $mx + y = 3$ i $2mx - my = 6$ w zależności od wartości parametru m .

Ćwiczenie 7



Rozwiąż test.

Proste o równaniach $(a - 1)x - 2y = 3$ i $4x - (a + 1)y = a$ dla $a = 3$:	Proste o równaniach $(a - 1)x - 2y = 3$ i $4x - (a + 1)y = a$ dla $a = -3$:	Proste o równaniach $(a - 1)x - 2y = 3$ i $4x - (a + 1)y = a$ dla $a = -4$:	Proste o równaniach $ax + 2y = -1$ i $8x + ay = a + 6$ przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy:
nakładają się ☐	nakładają się ☐	nakładają się ☐	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ ☐
nie nakładają się ☐	nie nakładają się ☐	nie nakładają się ☐	$a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ ☐
przecinają się ☐	przecinają się ☐	przecinają się ☐	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$ ☐

Ćwiczenie 8



Połącz w pary układy złożone z równań prostych oraz zbiory wartości parametrów, dla których proste te się przecinają.

$$\begin{aligned}(a - 3)x + 4y &= 2 \\ -2ax + ay &= 7\end{aligned}$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}(a - 2)x - 2y &= 7 \\ ax + 2y &= a - 1\end{aligned}$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$$

$$\begin{aligned}ax - y &= -2 \\ x + ay &= 7\end{aligned}$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 0\}$$

$$\begin{aligned}(a - 2)x + 3y &= 5 - a \\ ax + ay &= 8\end{aligned}$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

- Określisz wzajemne położenie prostych na podstawie ich równań.
- Odczytasz współrzędne punktu przecięcia prostych z ich ilustracji.
- Wyznaczysz wartości parametru, aby spełniony był zadany z góry warunek.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Symulacja interaktywna” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Symulacja interaktywna”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Proste i odcinki prostopadłe i równoległe](#)
- [Proste równoległe, proste prostopadłe](#)
- [Proste i odcinki prostopadłe](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Symulacja interaktywna” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Wzajemne położenie prostych na

płaszczyźnie kartezjańskiej”.