



Pojęcie ilorazu różnicowego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W materiale wprowadzimy pojęcie ilorazu różnicowego, który można wyliczyć ze stosunku długości odpowiednich boków trójkąta prostokątnego. Dowiemy się, że iloraz różnicowy mówi o tym, jak bardzo zmienia się wartość funkcji, gdy wzrastają argumenty tej funkcji. Zmianą tą może być zarówno dodatni wzrost, jak i ujemny spadek wartości funkcji. Bazując na materiale teoretycznym i omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Zdefiniujesz iloraz różnicowy funkcji.
- Zinterpretujesz na różne sposoby iloraz różnicowy funkcji.
- Przeanalizujesz, jak zmienia się różnica wartości funkcji dla podanych argumentów w stosunku do różnicy tych argumentów.
- Zastosujesz pojęcie ilorazu różnicowego do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Wprowadźmy definicję [ilorazu różnicowego funkcji](#).

Definicja: Iloraz różnicowy funkcji

Niech $f(x)$ oznacza dowolną funkcję określoną w otoczeniu punktu x_0 .

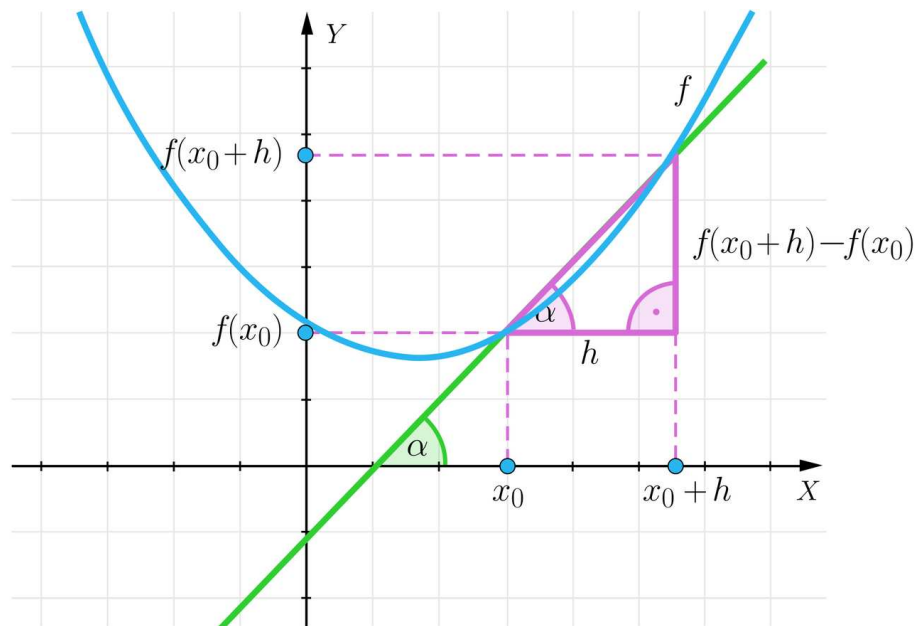
Ilorazem różnicowym funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu h zmiennej niezależnej x nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$U(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Inaczej mówiąc, jest to stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu funkcji.

Na osi X zaznaczymy pewien przyrost argumentu funkcji f , zaś na osi Y odpowiadający mu przyrost wartości funkcji.

Przedstawmy opisaną sytuację na poniższym rysunku:



Punkty o współrzędnych: $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0) + h)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

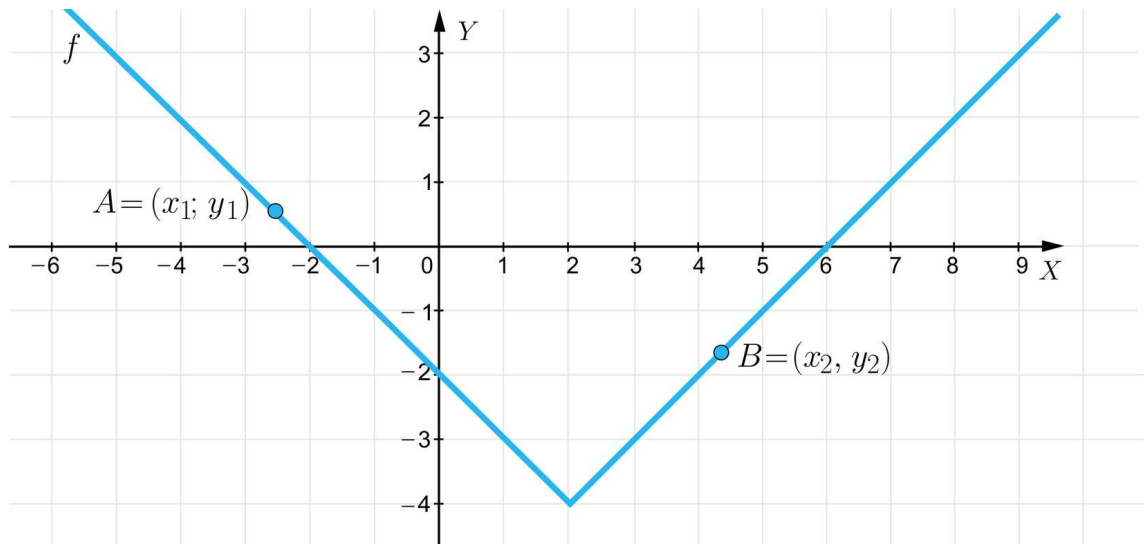
Jeżeli wykorzystamy definicję funkcji [tangens kąta ostrego](#) w trójkącie prostokątnym, to otrzymujemy następującą zależność:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Mając dany wzór funkcji lub jej wykres, możemy wyznaczyć iloraz różnicowy funkcji w punkcie x_0 .

Przykład 1

Na wykresie przedstawiono wykres funkcji f . Zapiszemy wzór na iloraz różnicowy tej funkcji w punktach A i B .



Rozwiązanie:

Z wykresu funkcji odczytujemy współrzędne punktów:

$$A = (x_1, y_1),$$

$$B = (x_2, y_2).$$

Obliczamy wartość przyrostu h dla argumentu x_1 .

$$\text{Zatem } h = x_2 - x_1.$$

Wobec tego, korzystając ze wzoru na iloraz różnicowy funkcji, mamy:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Przykład 2

Określmy funkcję f wzorem $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Obliczymy iloraz różnicowy tej funkcji w punkcie $x_0 = 2$ i przyroście argumentu $h = 8$.

Rozwiązanie:

$$\text{Jeżeli } x_0 = 2, \text{ to } f(x_0) = f(2) = \sqrt{2-1} = 1.$$

Dla $h = 8$ mamy:

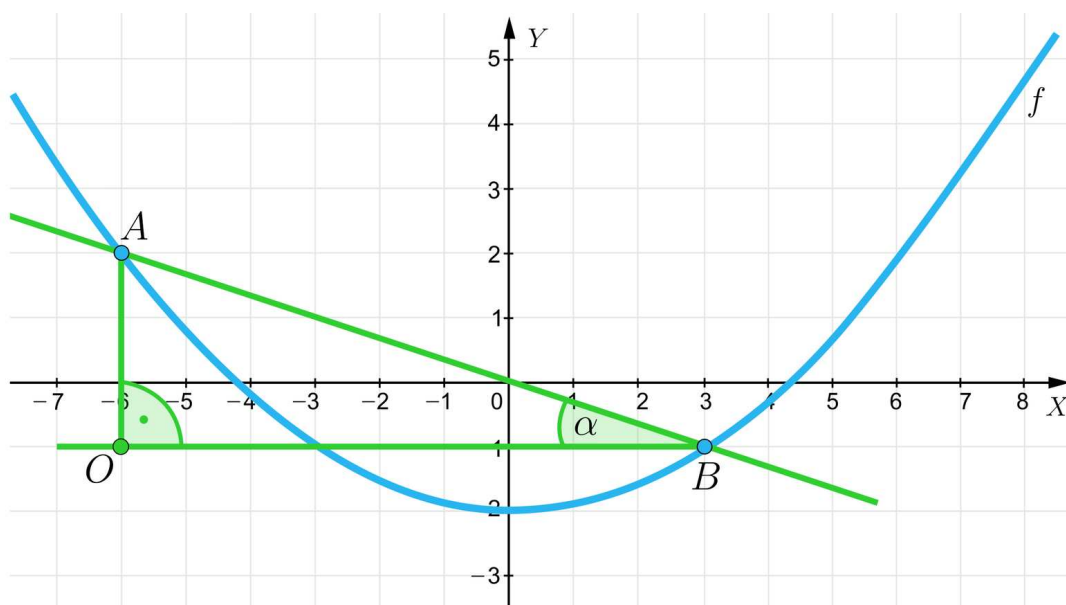
$$f(x_0 + h) = f(2 + 8) = f(10) = \sqrt{10 - 1} = 3.$$

Wobec tego iloraz różnicowy tej funkcji jest równy:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(10) - f(2)}{8} = \frac{3 - 1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Przykład 3

Obliczymy wartość tangensa kąta zaznaczonego na poniższym rysunku.



Rozwiązanie:

Z rysunku odczytujemy współrzędne punktów:

$$A = (-6, 2),$$

$$O = (-6, -1),$$

$$B = (3, -1).$$

Zatem:

$$|AO| = 3,$$

$$|OB| = 9.$$

Korzystając z definicji funkcji tangens mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Ważne!

W powyższym przykładzie obliczyliśmy iloraz różnicowy funkcji z wykresu w punkcie A i przyroście argumentu $h = 9$.

Przykład 4

Sprawdźmy, kiedy iloraz różnicowy funkcji w punkcie x_0 wynosi 0, gdy przyrost argumentu $h \neq 0$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na iloraz różnicowy funkcji, rozwiązujemy równanie:

$$0 = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Zatem $f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$, czyli $f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Iloraz różnicowy funkcji w punkcie x_0 wynosi 0, gdy wartość funkcji w punkcie x_0 oraz $x_0 + h$ jest taka sama.

Przykład 5

Wykażemy, że iloraz różnicowy funkcji f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i przyroście argumentu $h = 1$ jest równy $2ax_0 + a + b$.

Rozwiązanie:

Jeżeli $f(x) = ax^2 + bx + c$, to

$$f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

Korzystając ze wzoru na iloraz różnicowy funkcji, dla $h = 1$ mamy:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= f(x_0 + 1) - f(x_0) = \\ &= a \cdot (x_0 + 1)^2 + b \cdot (x_0 + 1) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c) = \\ &= ax_0^2 + 2ax_0 + a + bx_0 + b + c - ax_0^2 - bx_0 - c = \\ &= 2ax_0 + a + b. \end{aligned}$$

Słownik

iloraz różnicowy funkcji

stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu funkcji

tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta ostrego do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj infografikę, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Polecenie 2

Do wykresu funkcji f należą punkty A i B . Oblicz iloraz różnicowy funkcji w punktach A i B , jeżeli:

a) $A = (-3, 2)$ i $B = (0, 4)$,

b) $A = (1, -2)$ i $B = (5, 6)$.

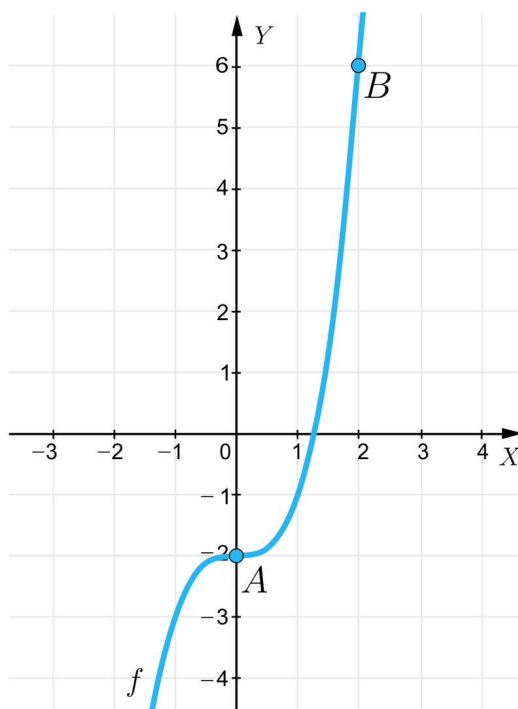
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zapoznaj się z poniższym rysunkiem i zaznacz poprawną odpowiedź.



Iloraz różnicowy funkcji f z rysunku w punktach A i B wynosi:

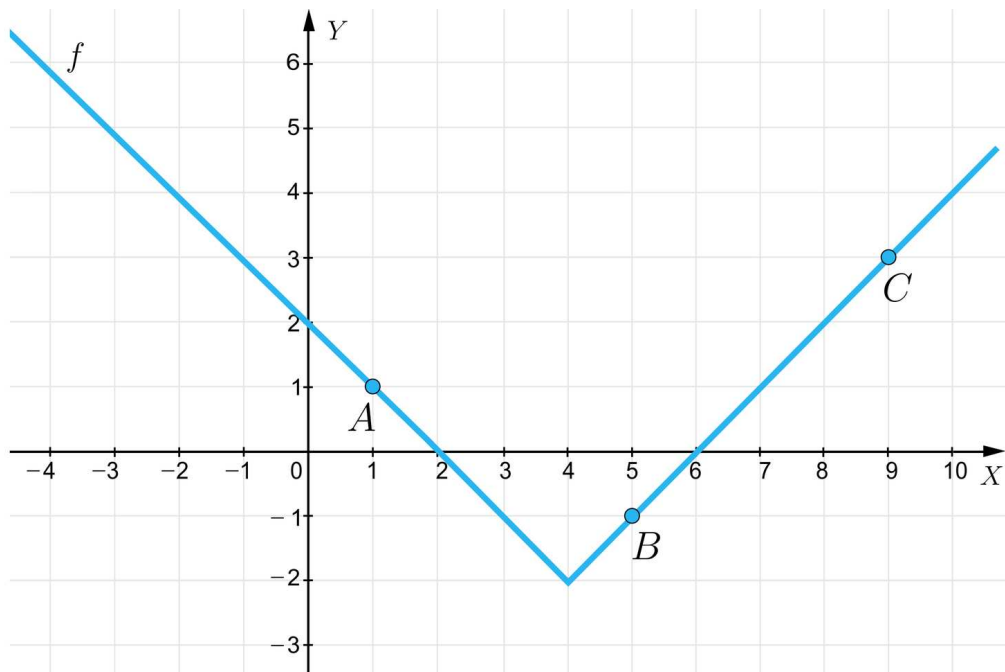
☐ $\frac{1}{4}$

☐ 1

☐ 4

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐ Iloraz różnicowy funkcji w punkcie C i przyroście $h = -8$ jest równy 4.

☐ Iloraz różnicowy funkcji w punkcie A i przyroście $h = 6$ wynosi 0.

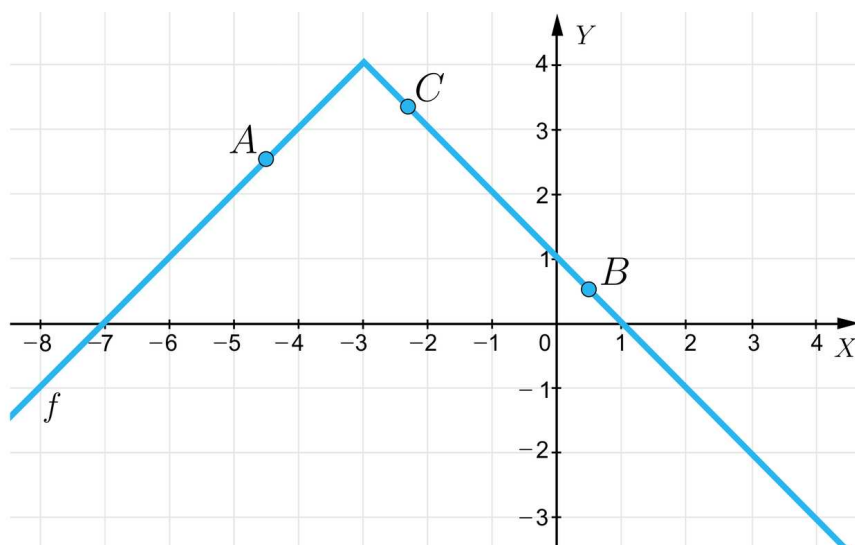
☐ Iloraz różnicowy funkcji w punkcie B i przyroście $h = -3$ wynosi $-\frac{1}{3}$.

☐ Ilorazy różnicowe w punktach A i B oraz przyroście $h = 3$ są równe.

Ćwiczenie 3



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Wstaw w tekst odpowiednie wyrażenia.

Jeżeli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, to:

- iloraz różnicowy funkcji w punktach A i B wynosi

- iloraz różnicowy funkcji w punktach A i C wynosi

- iloraz różnicowy funkcji w punktach B i C wynosi

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

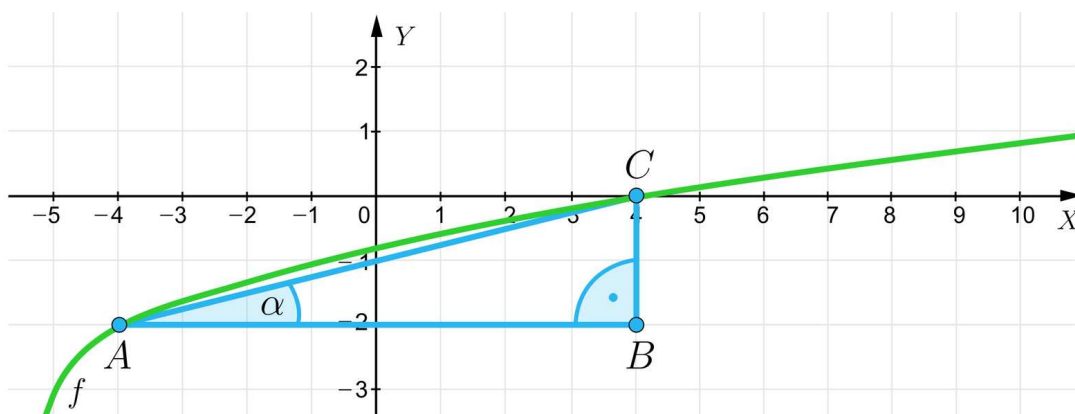
$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ćwiczenie 4



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

Współrzędne punktów A , B , C wynoszą odpowiednio:

$A = (\text{ }, \text{ })$

$B = (\text{ }, \text{ })$

$C = (\text{ }, \text{ })$.

Wobec tego:

$|AB| = \text{ },$

$|BC| = \text{ }.$

Zatem iloraz różnicowy funkcji, której wykres przedstawiono na powyższym rysunku, jest równy $\text{tg } \alpha = 0,25$.

३

Ćwiczenie 7



Określmy funkcję f wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$ oraz $x \neq 0$. Wyznacz wzór na iloraz różnicowy tej funkcji, gdy przyrost argumentu $h = 1$ w punkcie o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że iloraz różnicowy funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$ w punkcie o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$ i przyroście $h \neq 0$ jest równy a .

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pojęcie ilorazu różnicowego

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony 3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje iloraz różnicowy funkcji;
- interpretuje na różne sposoby iloraz różnicowy funkcji;
- analizuje, jak zmienia się różnica wartości funkcji dla podanych argumentów w stosunku do różnicy tych argumentów;
- stosuje pojęcie ilorazu różnicowego do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w Samouczku i ćwiczenia interaktywne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Pojęcie ilorazu różnicowego” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszyte minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Infografika”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3–5 z sekcji „Sprawdź się”; po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6–8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Sposoby opisywania funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Infografika” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu w zakresie wykorzystania pojęcia ilorazu różnicowego.