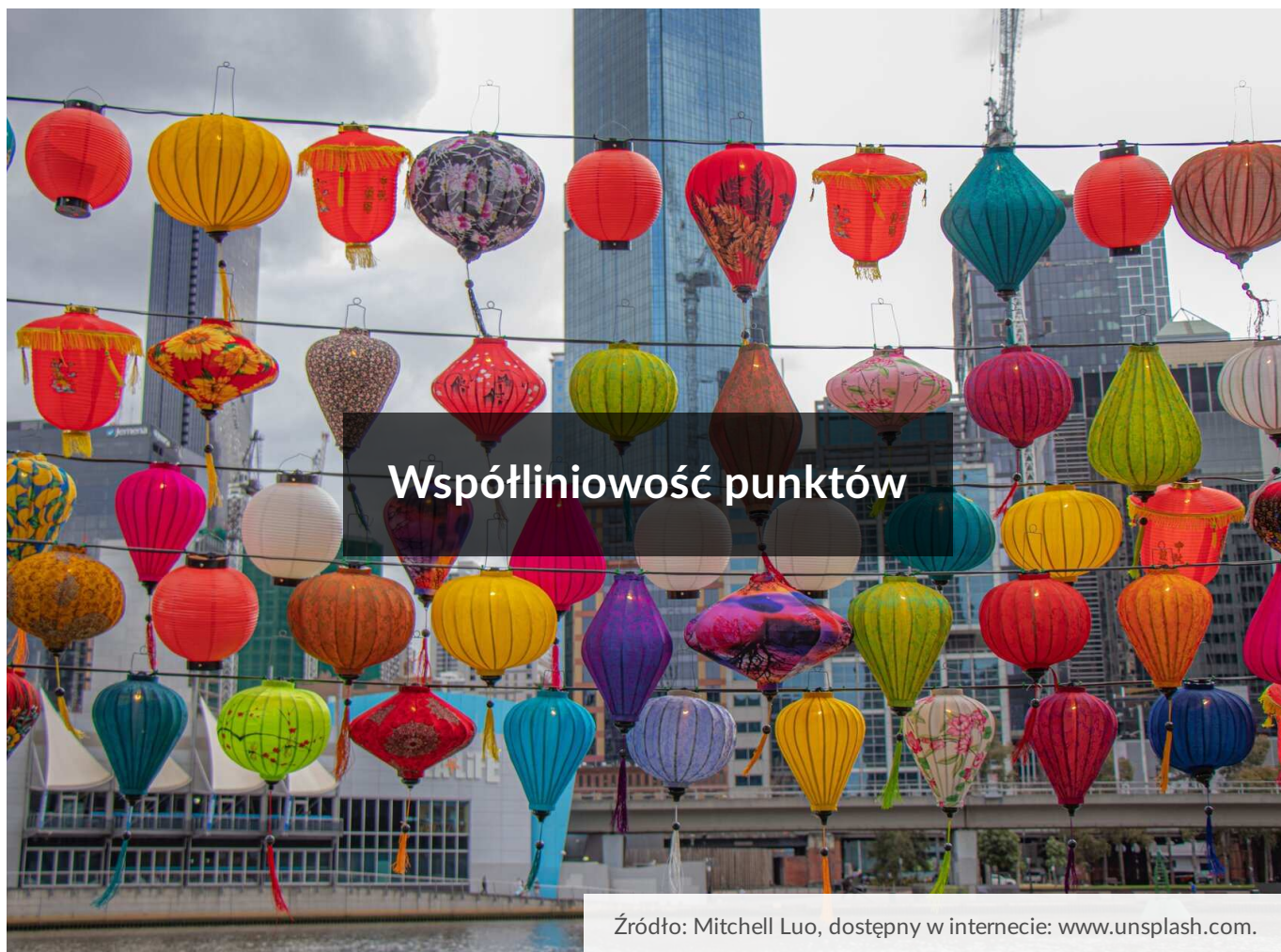




Współliniowość punktów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Współliniowość punktów

Źródło: Mitchell Luo, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji dowiesz się, co to znaczy, że punkty są współliniowe. Pojęcie jest łatwe, ale pomocne przy opisywaniu obiektów geometrycznych. Poznasz warunki współliniowości punktów na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych i bez niego.

Twoje cele

- Rozpoznasz punkty współliniowe na rysunku.
- Zastosujesz warunek współliniowości punktów na płaszczyźnie bez układu współrzędnych.
- Zastosujesz warunek współliniowości punktów umieszczonych w układzie współrzędnych.

Przeczytaj

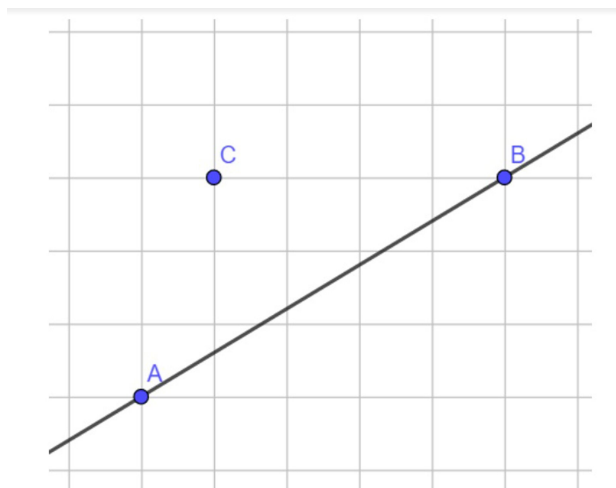
Zacniemy od definicji punktów współliniowych.

Definicja: punkty współliniowe

Punkty nazywamy współliniowymi wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na jednej prostej.

Oczywiście dowolne dwa różne punkty są współliniowe, bo przez każde dwa punkty można przeprowadzić prostą (i to dokładnie jedną). Szczególnie uwagę zwrócimy na współliniowość trzech różnych punktów.

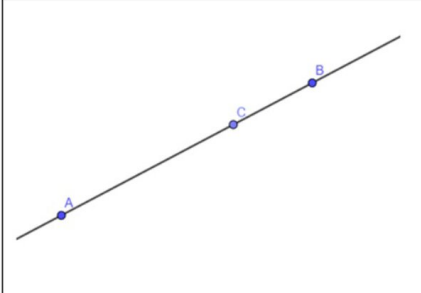
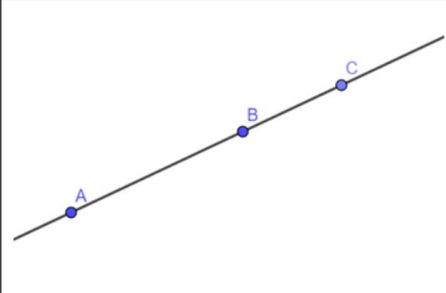
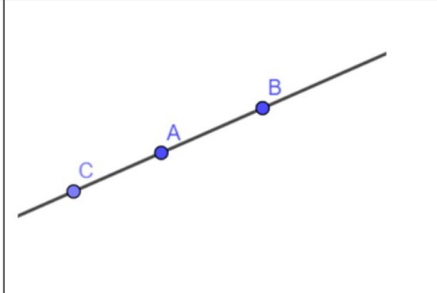
Przykład 1



Punkty A, B i C nie są współliniowe.

Warunek współliniowości punktów na płaszczyźnie bez układu współrzędnych

Z geometrii elementarnej znany jest warunek istnienia trójkąta: z odcinków AB , BC i AC można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy suma długości każdych dwóch z tych odcinków jest większa od długości trzeciego. Czyniąc z powyższego punkt wyjścia można zauważyć, że jeśli suma długości pewnych dwóch spośród odcinków AB , BC i AC jest równa długości trzeciego, to punkty A , B , C leżą na jednej prostej. I na odwrót: jeśli punkty A , B , C leżą na jednej prostej, to suma długości pewnych dwóch spośród odcinków AB , BC , AC jest równa długości trzeciego z nich.

		
$ AB = AC + CB $	$ AC = AB + BC \Leftrightarrow AB = AC - BC $	$ BC = AB + AC \Leftrightarrow AB = BC - AC $
	$ AB = AC - BC $	

Wynika stąd kryterium [współliniowości punktów](#)

Ważne!

- Punkty A, B, C są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy suma długości dwóch spośród odcinków AB, BC, AC jest równa długości trzeciego z nich.
- Jeżeli nie znamy porządku punktów A, B, C na osi liczbowej, to kryterium współliniowości możemy sformułować w następujący sposób: punkty A, B, C są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB| = |AC| + |CB|$ lub $|AB| = ||AC| - |BC||$.

Przykład 2

Dane są długości odcinków $|AB| = 7, |BC| = m, |AC| = 3$. Wyznamy wartość parametru m tak, aby punkty A, B, C były współliniowe.

Zauważmy najpierw, że $m > 0$, ponieważ m jest długością odcinka $|BC|$. Z kryterium współliniowości punktów wynika, że A, B, C będą współliniowe dokładnie wtedy, gdy $|AB| = |AC| + |CB|$ lub $|AB| = ||AC| - |BC||$.

Zatem otrzymujemy równania:

$$7 = m + 3 \text{ lub } 7 = |3 - m|$$

$$m = 4 \text{ lub } 7 = 3 - m \text{ lub } 7 = m - 3$$

$$m = 4 \text{ lub } m = -4 \text{ lub } m = 10$$

Jak już zauważyliśmy, m jest liczbą dodatnią, więc warunki zadania spełniają liczby $m \in \{4; 10\}$. Ponadto możemy stwierdzić, że dla $m = 4$ punkt C leży pomiędzy punktami A i B , zaś dla $m = 10$ punkt A leży pomiędzy punktami B i C .

Warunek współliniowości punktów umieszczonych w układzie współrzędnych

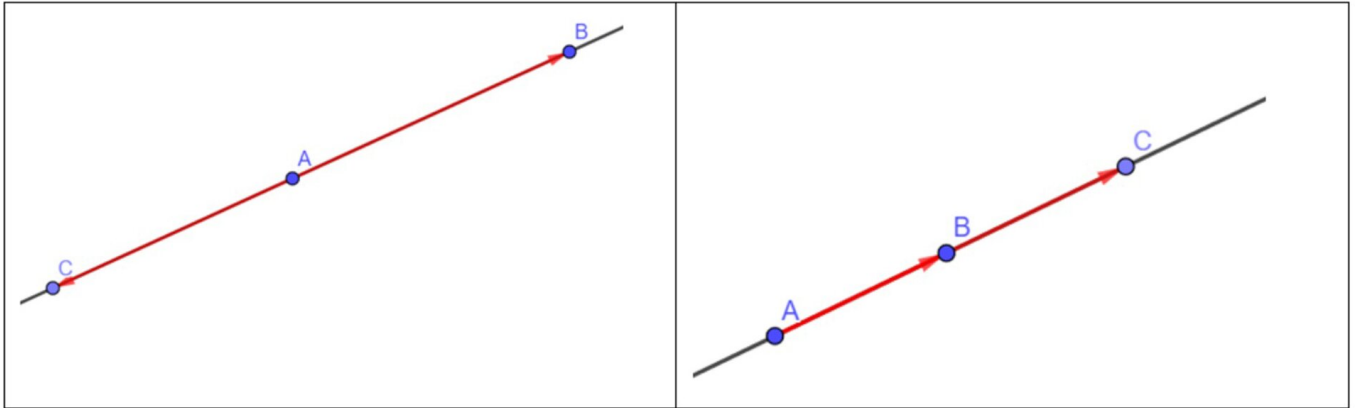
Korzystając z rachunku wektorowego (zobacz lekcje dotyczące wektorów) wyprowadzimy teraz [warunek współliniowości punktów](#) w zależności od ich współrzędnych

w prostokątnym układzie współrzędnych.

Niech dane będą różne punkty:

$$A = (x_A; y_A), B = (x_B; y_B), C = (x_C; y_C).$$

Zauważmy, że są one współliniowe dokładnie wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ równoległe.



Wyznamy najpierw współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ w zależności od współrzędnych punktów $A = (x_A; y_A)$, $B = (x_B; y_B)$, $C = (x_C; y_C)$

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A; y_B - y_A]$$

$$\overrightarrow{AC} = [x_C - x_A; y_C - y_A]$$

Możemy teraz skorzystać z kryterium równoległości wektorów (zobacz: lekcja o takim temacie):

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A) = 0$$

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (y_B - y_A)(x_C - x_A)$$

Stąd wniosek:

Ważne!

Punkty są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne spełniają warunek

$$A = (x_A; y_A), B = (x_B; y_B), C = (x_C; y_C)$$

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (y_B - y_A)(x_C - x_A)$$

Przykład 3

Zbadamy, czy punkty A, B, C są współliniowe, gdy

a) $A = (-5; -3), B = (0; -1), C = (10; 3);$

b) $A = (-5; 2)$, $B = (2; -1)$, $C = (9; -5)$

- Zbadamy, czy między współrzędnymi zachodzi związek.

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (y_B - y_A)(x_C - x_A)$$

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (0 - (-5))(3 - (-3)) = 5 \cdot 6 = 30$$

$$(y_B - y_A)(x_C - x_A) = (-1 - (-3))(10 - (-5)) = 2 \cdot 15 = 30$$

Zatem punkty $A = (-5; -3)$, $B = (0; -1)$, $C = (10; 3)$ są współliniowe.

- Ponownie zbadamy, czy między współrzędnymi zachodzi związek.

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (y_B - y_A)(x_C - x_A)$$

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (2 - (-5))(-5 - 2) = 7 \cdot (-7) = -49$$

$$(y_B - y_A)(x_C - x_A) = (-1 - 2)(9 - (-5)) = -3 \cdot 14 = -42$$

Zatem punkty $A = (-5; 2)$, $B = (2; -1)$, $C = (9; -5)$ nie są współliniowe.

Słownik

współliniowość punktów

mówimy, że punkty są współliniowe, gdy istnieje prosta przechodząca przez te punkty

warunek współliniowości punktów

trzy różne punkty A , B , C są współliniowe dokładnie wtedy, gdy $|AB| = |AC| + |BC|$
lub $|AB| = ||AC| - |BC||$

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w animacji. Na ich podstawie rozwiąż poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DEvmhj3Eq>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej współliniowości punktów.

Polecenie 2

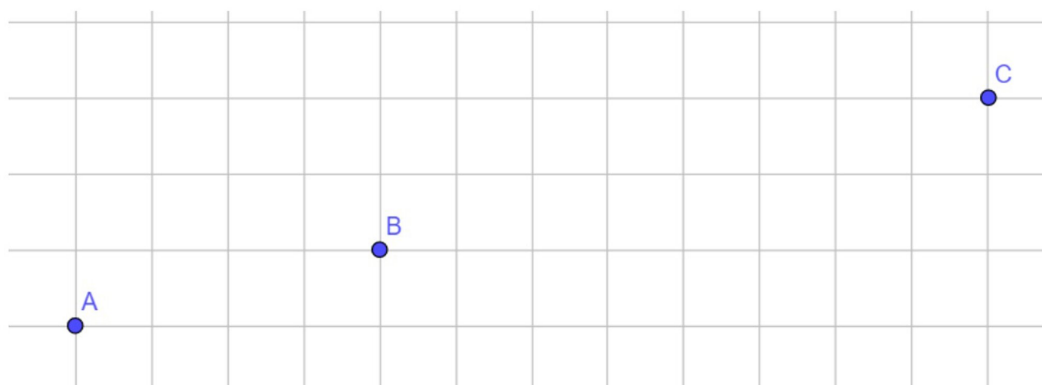
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Czy punkty A , B , C są współliniowe? Wybierz właściwą odpowiedź.



☐ Nie

☐ Tak

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Uzupełnij tabelę tak, aby punkty A , B , C były współliniowe oraz punkt B leżał pomiędzy punktami A i C .

Długość odcinka AB	Długość odcinka BC	Długość odcinka AC
4	5	
7		12
	3	12
	7	14

Ćwiczenie 4



Dane są długości odcinków $|AB| = m^2$, $|BC| = m$, $|AC| = 12$. Wyznacz wartość parametru m tak, aby punkty A , B , C były współliniowe. Dla wyznaczonych wartości parametru m rozstrzygnij, w jakiej kolejności leżą one na prostej. (Jeśli kolejność odpowiedzi nie wynika z treści zadania zacznij od mniejszej wartości). Uzupełnij puste pola w poniższym tekście.

Ponieważ $m > \text{[puste pole]}$, więc $m = \text{[puste pole]}$ lub $m = \text{[puste pole]}$. Dla większego rozwiązania punkt [puste pole] leży pomiędzy punktami [puste pole] i [puste pole] , zaś dla mniejszego punkt [puste pole] leży pomiędzy punktami [puste pole] i [puste pole] .

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Zbadaj, czy punkty o podanych współrzędnych są współliniowe. Zaznacz właściwe odpowiedzi.

☐ $A = (-3; 1); B = (1; 0); C = (9; -4)$

☐ $A = (1; 8); B = (4; 5); C = (10; -1)$

☐ $A = (-2; 5); B = (1; 2); C = (7; -4)$

☐ $A = (-1; 6); B = (2; 3); C = (8; -2)$

Ćwiczenie 7



Wyznacz wartość parametru m tak, aby punkty A , B , C były współliniowe.

Współrzędne punktu A	Współrzędne punktu B	Współrzędne punktu C	Wartość parametru m
$(-4; 1)$	$(-1; 0)$	$(8; m)$	
$(-4; 1)$	$(-1, m)$	$(5; -5)$	
$(m; -5)$	$(-2; -2)$	$(10; 7)$	
$(-7; -2)$	$(m; -1)$	$(13; 2)$	

Ćwiczenie 8



Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których punkty $A = (-1; m + 3)$, $B = (m^2 - 2; 2m + 5)$, $C = (m^3 - m - 1; m^2 + 3)$ są współliniowe. (Jeśli kolejność odpowiedzi nie wynika z treści zadania zacznij od mniejszej wartości).

Zacznijmy od sprawdzenia, czy istnieją wartości parametru m , dla których $A = B$, $A = C$ lub $B = C$. Po rozwiązaniu odpowiednich układów równań uzupełnij poniższe zdania.

Dla $m =$ zachodzi równość $=$ $=$ (, 3), dla $m =$ zachodzi równość $=$ $=$ (, 4). Dwa różne punkty $=$ i są zawsze współliniowe.

Dla $m \neq$ i $m \neq$ mamy trzy różne punkty, więc musimy skorzystać z warunku współliniowości punktów umieszczonych w układzie współrzędnych. $(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (y_B - y_A)(x_C - x_A)$. Zwróć uwagę, że korzystając z tego warunku otrzymalibyśmy również wcześniej rozważane wartości parametru m . Jedynym "nowym" rozwiązaniem rozważanego równania jest liczba $m =$. Wówczas mamy $A =$ (;), $B =$ (;), $C =$ (;). Łatwo widać, że wszystkie punkty leżą na prostej o równaniu $x =$.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Współliniowość punktów

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX.3) Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Uczeń:

oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- Rozpozna punkty współliniowe na rysunku.
- Zastosuje warunek współliniowości punktów na płaszczyźnie bez układu współrzędnych.
- Zastosuje warunek współliniowości punktów umieszczonych w układzie współrzędnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi uczniów, by na podstawie wiadomości zdobytych przed lekcją zaproponowali cel zajęć w temacie: „Współliniowość punktów” oraz kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”, wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1 „Przeanalizuj informacje zawarte w animacji. Na ich podstawie rozwiąż poniższe polecenie.”. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia, najważniejsze etapy realizacji polecenia.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

[Odległość punktu od prostej w układzie współrzędnych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Współliniowość punktów”.