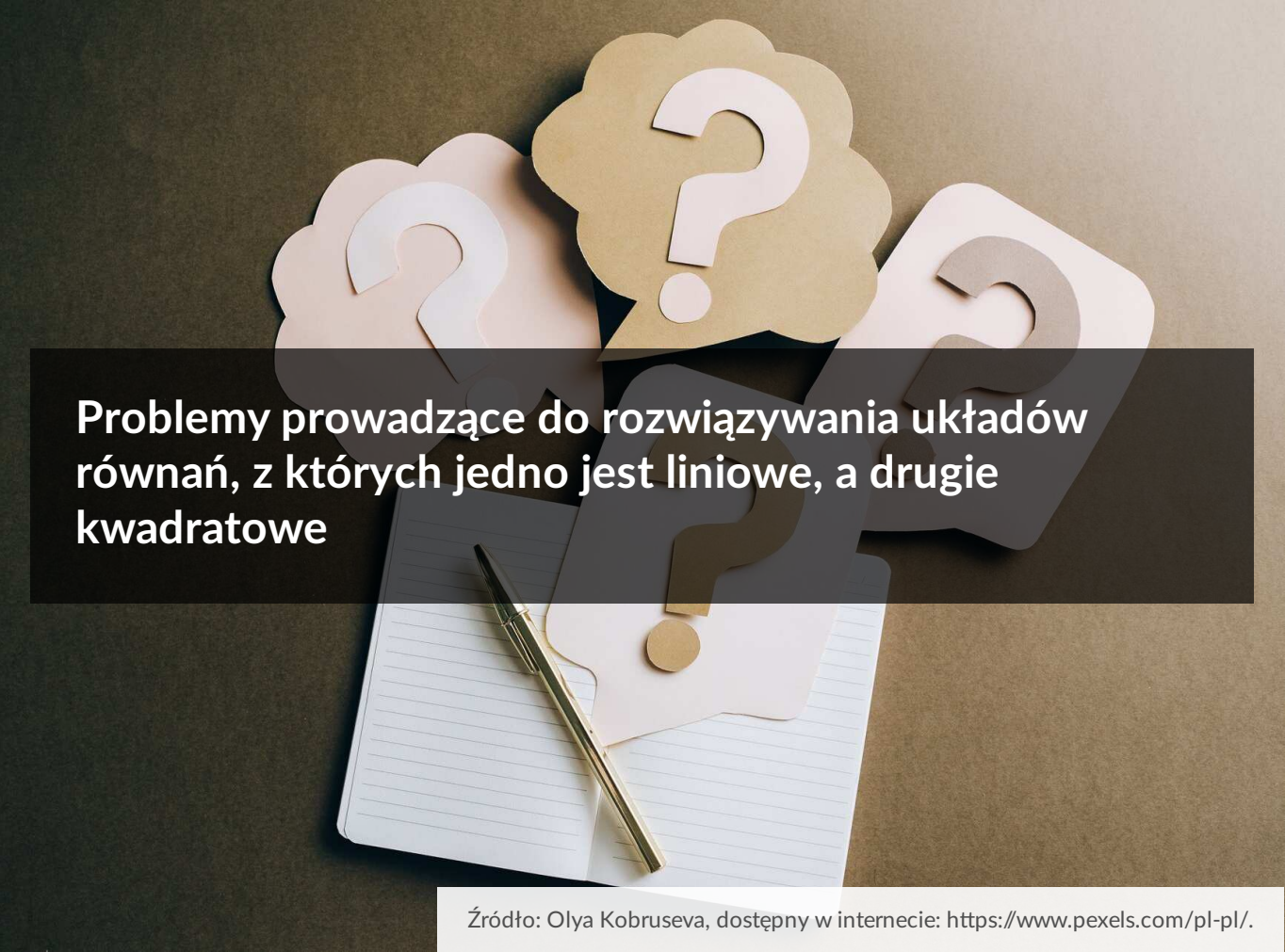




Problemy prowadzące do rozwiązywania układów równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Problemy prowadzące do rozwiązywania układów równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe

Źródło: Olya Kobruseva, dostępny w internecie: <https://www.pexels.com/pl-pl/>.

W tym materiale zapoznasz się z układem równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe. Nie tylko nauczysz się rozwiązywać takie układy, ale również dowiesz się jak wykorzystać tę umiejętność do znajdowania współrzędnych punktów przecięcia prostej z parabolą, okręgiem lub hiperbolą.

Twoje cele

- Rozwiążesz układ równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe.
- Wyznaczysz punkty przecięcia (o ile istnieją) prostej z parabolą, okręgiem lub hiperbolą.

Przeczytaj

Definicja: Układ równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi

Układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego, nazywamy układem drugiego stopnia.

W szczególności układem równań drugiego stopnia jest układ składający się z równania liniowego oraz kwadratowego.

Przykład 1

Rozwiążmy układ równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi:

$$\text{a) } \begin{cases} y = x^2 - 3x + 8 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Z drugiego równania wyznaczamy y , ponieważ występuje w pierwszej potędze:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 8 \\ y = 11 - x. \end{cases}$$

Wyrażenie $11 - x$ wstawiamy w miejsce y do pierwszego równania:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 8 = 11 - x \\ y = 11 - x \end{cases}$$

i porządkujemy pierwsze równanie skąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = 11 - x. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób równanie kwadratowe z którego wyznaczymy rozwiązania o ile istnieją. Zaczynamy od wyznaczenia wyróżnika trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16, \sqrt{\Delta} = 4.$$

Stąd wynika, że

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ oraz } x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Wyznaczając y odpowiednio dla x_1 i x_2 dostajemy

$$y_1 = 11 - (-1) = 12 \text{ oraz } y_2 = 11 - 3 = 8.$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem układu równań są pary liczb $\begin{cases} x = -1 \\ y = 12 \end{cases}$ i $\begin{cases} x = 3 \\ y = 8. \end{cases}$

$$\text{b) } \begin{cases} y = x^2 + 5x - 3 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Z równania liniowego wyznaczamy niewiadomą y .

Wyrażenie $3x - 6$ wstawiamy w miejsce y do pierwszego równania:

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 3 = 3x - 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

i porządkujemy pierwsze równanie skąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3 = 0 \\ y = 3x - 6. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób równanie kwadratowe z którego wyznaczymy rozwiązania o ile istnieją. Zaczynamy od wyznaczenia wyróżnika trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8 < 0.$$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego jest ujemny, zatem równanie nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Odpowiedź:

Układ równań nie ma rozwiązań.

$$\text{c) } \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Z drugiego równania układ wyznaczamy y

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ y = 2x. \end{cases}$$

Wyrażenie $2x$ wstawiamy w miejsce y do pierwszego równania:

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x^2 = 0 \\ y = 2x. \end{cases}$$

porządkujemy pierwsze równanie i stąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ y = 2x. \end{cases}$$

Odpowiedź:

Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x \end{cases}$. Pary liczb, będące rozwiązaniami układu równań są współrzędnymi punktów, które leżą na prostej $y = 2x$.

Interpretacja geometryczna układów równań drugiego stopnia

Równanie liniowe $Ax + By + C = 0$ (jeśli współczynniki przy zmiennych nie są równocześnie równe 0) jest równaniem prostej na płaszczyźnie, a równanie kwadratowe $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ jest równaniem paraboli na płaszczyźnie. Zatem rozwiązanie układu równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$$

wyznacza punkty przecięcia prostej i [paraboli](#), o ile takie istnieją.

Przykład 2

Rozwiążemy [układ równań](#) z dwiema niewiadomymi i podamy jego interpretację geometryczną:

$$\text{a) } \begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Podany układ równań jest układem równań drugiego stopnia z dwoma niewiadomymi.

Możemy narysować wykresy podanych równań i znaleźć punkt przecięcia, o ile taki istnieje.

Wyznamy miejsca przecięcia z osią odciętych, paraboli opisanej równaniem $y = x^2 + x - 2$.

Rozpocniemy od wyznaczania wyróżnika trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9, \sqrt{\Delta} = 3.$$

Wówczas

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2} = -2,$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

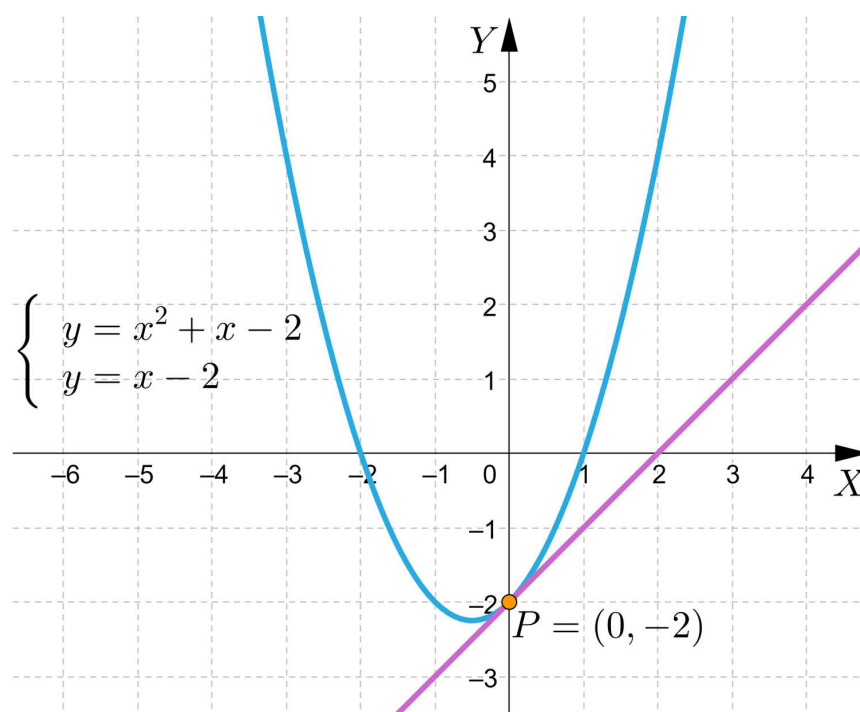
Wynika stąd, że parabola przecina oś X w punktach $(-2, 0)$ oraz $(1, 0)$.

Parabola przecina oś Y w punkcie $(0, -2)$.

Z równania kierunkowego prostej $y = x - 2$ odczytujemy, że prosta przecina oś Y w punkcie $(0, -2)$ oraz oś X w punkcie $(2, 0)$.

Punktem wspólnym obu wykresów jest punkt $P = (0, -2)$.

Poniższy rysunek przedstawia ilustrację graficzną układu.



Odpowiedź:

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb, będąca odpowiednio współrzędnymi punktu $P = (0, -2)$.

$$\text{b) } \begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że równanie paraboli jest takie samo jak w podpunkcie a), czyli wykres przecina oś X w punktach $(-2, 0)$ oraz $(1, 0)$ a oś Y w punkcie $(0, -2)$.

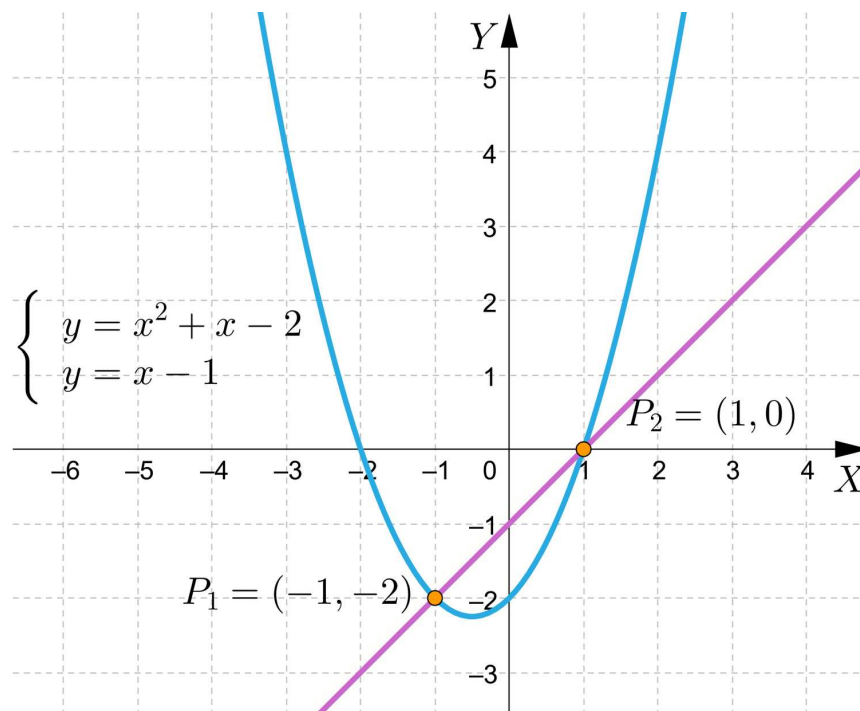
Aby wykonać dokładny rysunek paraboli w układzie współrzędnych obliczamy współrzędne wierzchołka, czyli

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} \text{ oraz } q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-9}{4} = -2\frac{1}{4}, \text{ bo}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9.$$

Z równania kierunkowego prostej $y = x - 1$ odczytujemy, że prosta przecina oś odciętych dla $x = 1$ oraz przecina oś Y w punkcie $(0, -1)$.

Poniższy rysunek przedstawia ilustrację graficzną układu.



Widać z rysunku, że parabola i prosta mają dwa punkty wspólne. Współrzędne tych punktów odczytujemy z wykresu, czyli $P_1 = (-1, -2)$ oraz $P_2 = (1, 0)$.

Sprawdzamy, czy rozwiązując podany układ algebraicznie dostaniemy takie samo rozwiązanie.

Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania i wyrażenie $x - 1$ wstawiamy w miejsce y do pierwszego równania:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 = x - 1 \\ y = x - 1. \end{cases}$$

porządkujemy pierwsze równanie skąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = x - 1. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób równanie kwadratowe $x^2 - 1 = 0$, które rozwiązujemy następująco

$$x^2 = 1,$$

$$|x| = 1,$$

$$x_1 = -1 \text{ i } x_2 = 1.$$

Wyznaczamy odpowiednio niewiadomą y dla x_1 i x_2 , czyli

$$y_1 = -1 - 1 = -2 \text{ oraz } y_2 = 1 - 1 = 0$$

Rozwiązaniem układu równań są pary liczb postaci $(-1, -2)$ oraz $(1, 0)$.

Odpowiedź:

Rozwiązaniem układu równań są dwie pary liczb, będące współrzędnymi punktów, odpowiednio $P_1 = (-1, -2)$ oraz $P_2 = (1, 0)$.

Przypomnijmy, że **okrąg** o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ ma równanie:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Układ równań opisujący prostą i okrąg

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

ma:

- dokładnie dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy prosta przecina okrąg w dwóch punktach,
- dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy prosta jest styczna do okręgu
- nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy prosta i okrąg > nie mają punktów wspólnych.

Przykład 3

Rozwiążemy układ równań z dwiema niewiadomymi, gdzie jedno z równań jest równaniem okręgu, a drugie jest równaniem liniowym, wykorzystując interpretację geometryczną:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Pierwsze równanie opisuje okrąg o środku w punkcie $S = (0, 0)$ oraz promieniu $r = 2$.

Przekształcamy równanie prostej w postaci ogólnej do równania prostej w postaci kierunkowej:

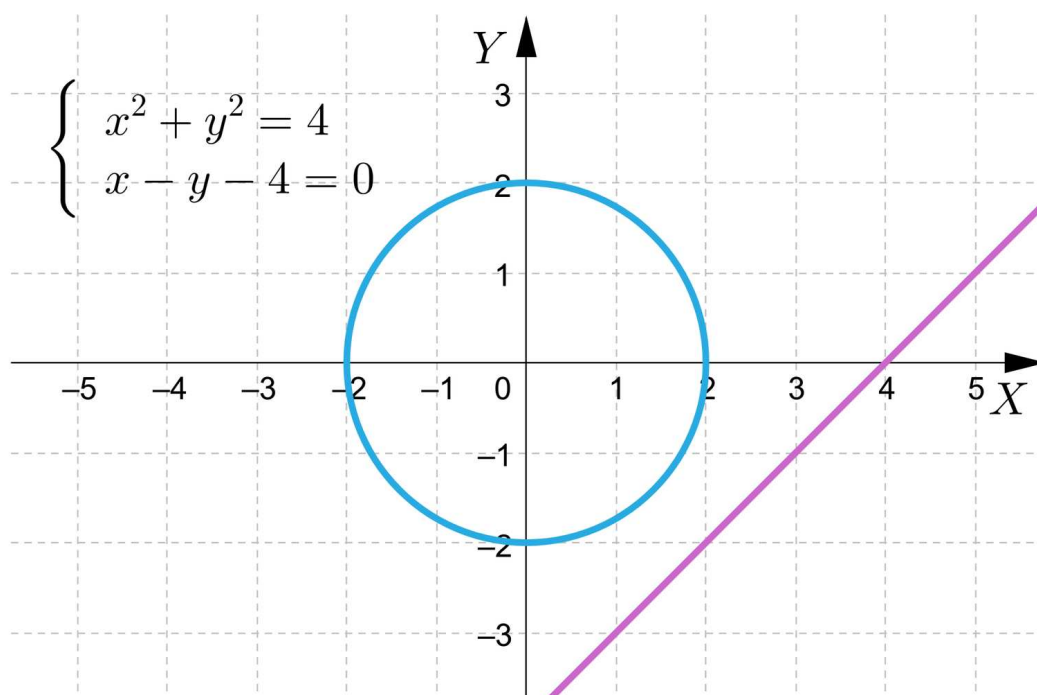
$$-y = -x + 4.$$

Mnożąc stronami przez (-1) dostajemy

$$y = x - 4.$$

Z równania kierunkowego **prostej** odczytujemy, że prosta przecina oś Y w punkcie $(0, -4)$ oraz oś odciętych dla $x = 4$.

Poniższy rysunek przedstawia ilustrację graficzną układu:



Wykresy nie posiadają punktów wspólnych, zatem układ równań nie ma rozwiązania.

Odpowiedź:

Układ nie posiada rozwiązań.

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Pierwsze równanie opisuje okrąg o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu $r = 2$.

Przekształcamy równanie prostej w postaci ogólnej do równania prostej w postaci kierunkowej:

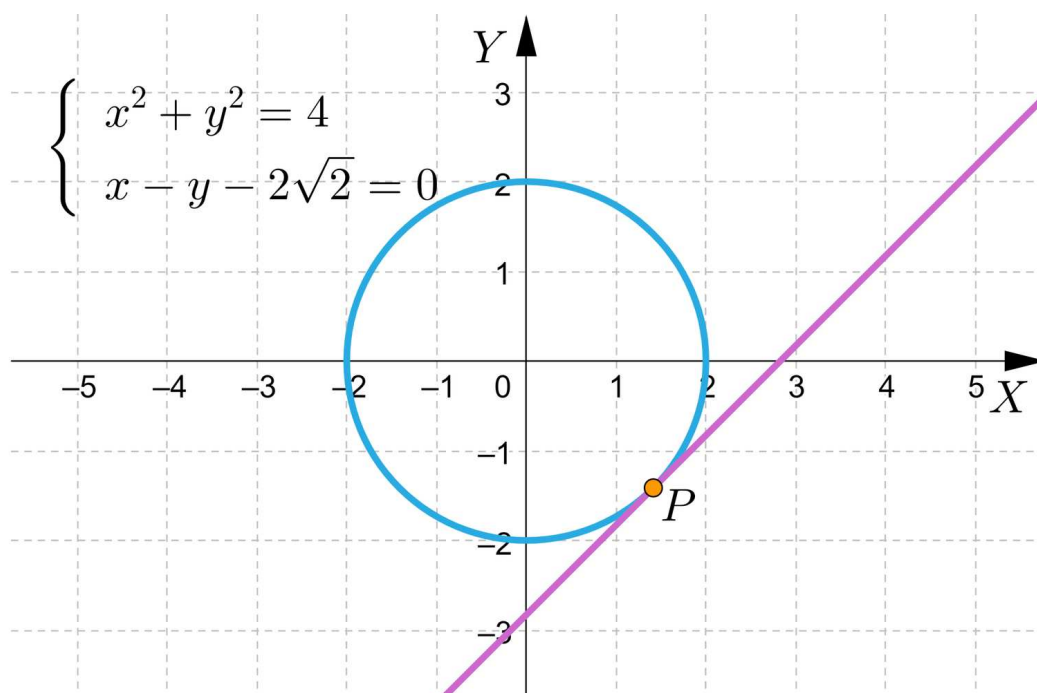
$$-y = -x + 2\sqrt{2}.$$

Mnożąc obie strony przez (-1) dostajemy

$$y = x - 2\sqrt{2}.$$

Z równania kierunkowej prostej odczytujemy, że prosta przecina oś Y w punkcie $(0, -2\sqrt{2})$ i oś odciętych dla $x = 2\sqrt{2}$.

Poniższy rysunek przedstawia ilustrację graficzną układu.



Odczytujemy z rysunku, że wykresy posiadają jeden punkt wspólny – prosta jest styczna do okręgu w punkcie P .

Współrzędne punktu P są trudne do odczytania, więc wyznaczamy rozwiązanie układu metodą algebraiczną.

Korzystając z postaci równania kierunkowego prostej, zapisujemy układ równań następująco:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Wyrażenie $x - 2\sqrt{2}$ wstawiamy w miejsce y do pierwszego równania:

$$\begin{cases} x^2 + (x - 2\sqrt{2})^2 = 4 \\ y = x - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

i porządkujemy pierwsze równanie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 4 \\ y = x - 2\sqrt{2} \end{cases},$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{cases} 2x^2 - 4\sqrt{2}x + 4 = 0 \\ y = x - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Rozwiążemy równanie kwadratowe $2x^2 - 4\sqrt{2}x + 4 = 0$, zaczynając od wyznaczenia wyróżnika trójmianu kwadratowego

$$\Delta = b^2 - 4ac = 32 - 32 = 0.$$

Wynika stąd, że istnieje tylko jedno rozwiązanie równania kwadratowego

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}.$$

Wyznaczamy wartość drugiej niewiadomej $y_0 = \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -\sqrt{2}$.

Zatem prosta $x - y - 2\sqrt{2} = 0$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4$ w punkcie $P = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Odpowiedź:

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$.

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

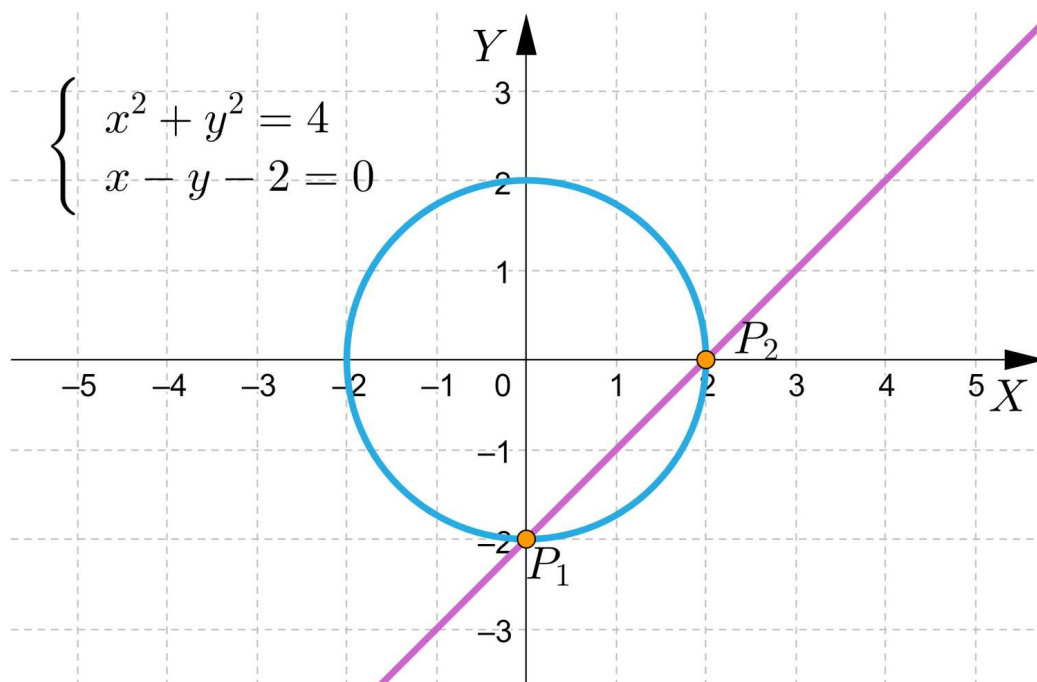
Pierwsze równanie opisuje okrąg o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu $r = 2$.

Przekształcamy równanie prostej w postaci ogólnej do równania prostej w postaci kierunkowej i otrzymujemy

$$y = x - 2.$$

Z równania prostej w postaci kierunkowej odczytujemy, że prosta przecina oś Y w punkcie $(0, -2)$ a oś odciętych dla $x = 2$.

Poniższy rysunek przedstawia ilustrację graficzną układu.



Odczytujemy z wykresu, że prosta przecina okrąg w dwóch punktach: $P_1 = (0, -2)$ i $P_2 = (2, 0)$. Wynika stąd, że układ równań ma dwa rozwiązania.

Przejdziemy do rozwiązania podanego układu równań metodą algebraiczną.

Skorzystamy z postaci równania kierunkowej prostej, aby zapisać [układ równań](#)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Z drugiego równania układu wyznaczamy y i wyrażenie $x - 2$ wstawiamy w miejsce y do pierwszego równania:

$$\begin{cases} x^2 + (x - 2)^2 = 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

porządkujemy pierwsze równanie stosując wzór skróconego mnożenia

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 4x + 4 = 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

i stąd otrzymujemy

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x = 0 \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe $2x^2 - 4x = 0$ korzystając z wyłączenia czynnika przed nawias, czyli

$$2x(x - 2) = 0,$$

$$x_1 = 0 \text{ i } x_2 = 2.$$

Wyznaczamy odpowiednie wartości niewiadomej y dla x_1 oraz x_2 , czyli $y_1 = 0 - 2 = -2$ i $y_2 = 2 - 2 = 0$. Otrzymujemy w ten sposób dwie pary liczb, które pokrywają się z odczytanymi z wykresu współrzędnymi punktów.

Odpowiedź:

$$\text{Rozwiązanie układu równań: } \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Wykresem równania $xy = a$ określonego dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $a \neq 0$ na płaszczyźnie jest **hiperbola**, więc układ opisujący odpowiednio hiperbolę i prostą

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ xy = a \end{cases}$$

ma:

- dokładnie dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy prosta przecina hiperbolę w dwóch punktach,
- dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy prosta ma jeden punkt wspólny z hiperbolą,
- nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy prosta i hiperbola nie mają punktów wspólnych.

Przykład 4

Rozwiążemy układ równań z dwiema niewiadomymi, gdzie jedno z równań jest równaniem hiperboli, a drugie jest równaniem liniowym, wykorzystując interpretację geometryczną:

$$\text{a) } \begin{cases} xy = 1 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$$

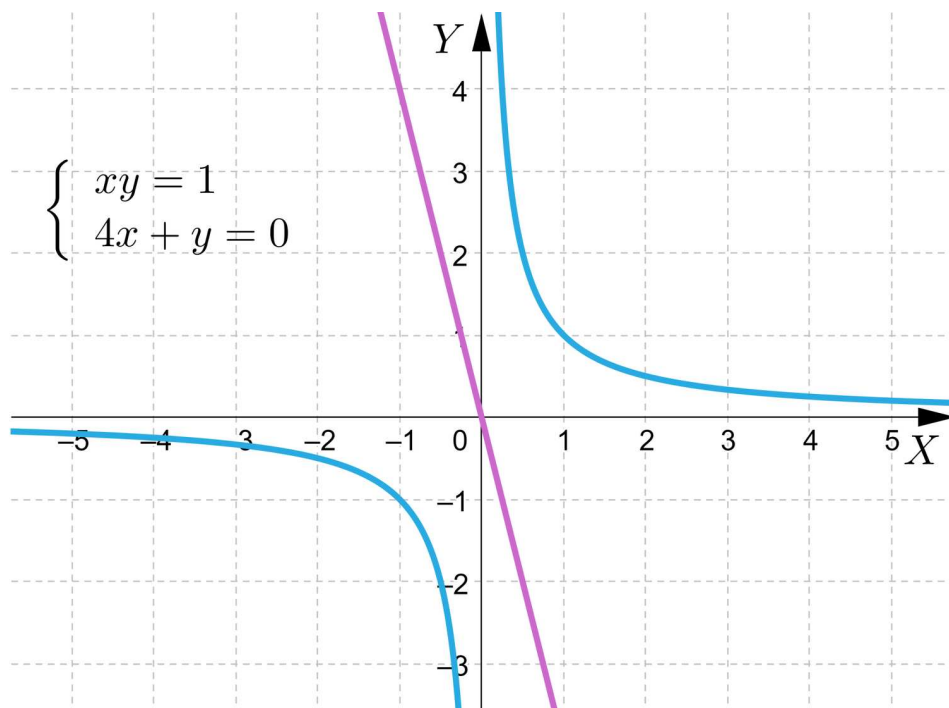
Rozwiązanie:

Równanie hiperboli przekształcamy do postaci $y = \frac{1}{x}$. Asymptotami wykresu są proste o równaniu $x = 0$ oraz $y = 0$.

Równanie prostej w postaci ogólnej przekształcamy do równania prostej w postaci kierunkowej $y = -4x$.

Prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych. Dla dokładnego narysowania wykresu potrzebny jest drugi punkt, więc dla $x = 1$ otrzymujemy punkt o współrzędnych $(1, -4)$.

Poniższy rysunek przedstawia ilustrację graficzną układu.



Odczytujemy z rysunku, że wykresy prostej i hiperboli nie przecinają się. Wynika stąd, że układ nie ma rozwiązań.

Odpowiedź:

Układ jest sprzeczny.

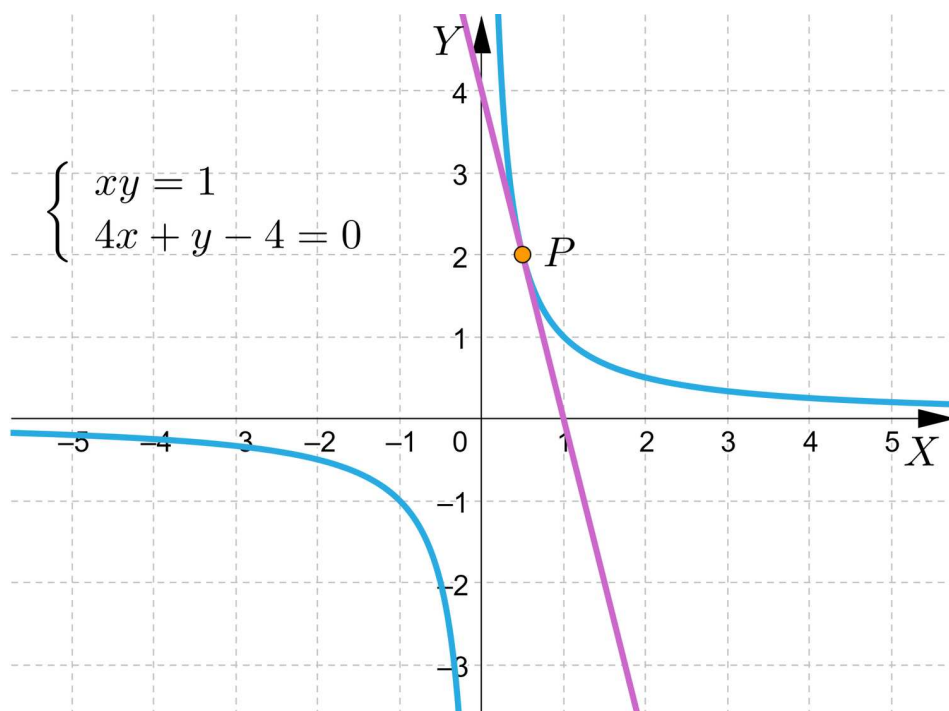
b)
$$\begin{cases} xy = 1 \\ 4x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Równanie hiperboli przekształcamy do postaci $y = \frac{1}{x}$. Asymptotami wykresu są proste o równaniu $x = 0$ oraz $y = 0$.

Równanie **prostej** w postaci ogólnej przekształcamy do równania prostej w postaci kierunkowej $y = -4x + 4$.

Poniższy rysunek przedstawia ilustrację graficzną układu.



Z podanego rysunku możemy odczytać, że punktem wspólnym hiperboli i prostej jest punkt $P = (\frac{1}{2}, 2)$.

Sprawdzamy, czy poprawnie odczytaliśmy współrzędne punktu rozwiązując układ równań algebraicznie. Zapisujemy układ równań korzystając z równania kierunkowej prostej:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = -4x + 4. \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania i wyrażenie $-4x + 4$ wstawiamy w miejsce y do pierwszego równania

$$\begin{cases} x(-4x + 4) = 1 \\ y = -4x + 4. \end{cases}$$

Porządkujemy pierwsze równanie skąd otrzymujemy

$$\begin{cases} -4x^2 + 4x = 1 \\ y = -4x + 4. \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe $-4x^2 + 4x - 1 = 0$.

Wylączamy (-1) przed nawias i otrzymujemy $-(4x^2 - 4x + 1) = 0$.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia aby zapisać równanie kwadratowe w postaci $-(2x - 1)^2 = 0$.

Rozwiązaniem równania jest liczba $x = \frac{1}{2}$. Wyznaczamy wartość drugiej niewiadomej

$$y = -4 \cdot \frac{1}{2} + 4 = -2 + 4 = 2.$$

Odczytane współrzędne punktu P pokrywają się z algebraicznym rozwiązaniem.

Odpowiedź:

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2. \end{cases}$$

Prosta o równaniu $4x + y - 4 = 0$ ma z hiperbolą $xy = 1$ jeden punkt wspólny $P = (\frac{1}{2}, 2)$.

$$\text{c) } \begin{cases} xy = 1 \\ 4x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

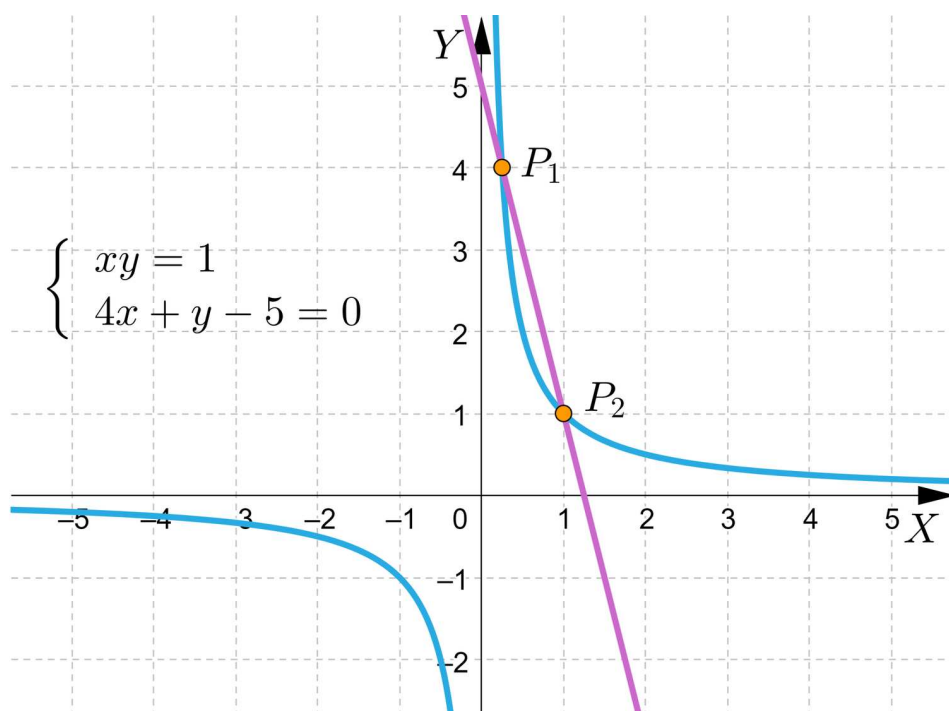
Rozwiązanie:

Równanie hiperboli przekształcamy do postaci $y = \frac{1}{x}$. Asymptotami wykresu są proste o równaniu $x = 0$ oraz $y = 0$.

Równanie prostej w postaci ogólnej przekształcamy do równania prostej w postaci kierunkowej

$$y = -4x + 5.$$

Poniższy rysunek przedstawia ilustrację graficzną układu.



Z rysunku odczytujemy współrzędne punktów wspólnych hiperboli i prostej $P_1 = (\frac{1}{4}, 1)$ oraz $P_2 = (1, 1)$.

Sprawdzamy, czy poprawnie odczytaliśmy współrzędne punktów rozwiązując układ metodą algebraiczną. Korzystamy z równania prostej w postaci kierunkowej aby zapisać układ równań

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = -4x + 5. \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy y i wyrażenie $-4x + 5$ wstawiamy w miejsce y do pierwszego równania

$$\begin{cases} x(-4x + 5) = 1 \\ y = -4x + 5. \end{cases}$$

Porządkujemy pierwsze równanie skąd otrzymujemy

$$\begin{cases} -4x^2 + 5x = 1 \\ y = -4x + 5. \end{cases}$$

Rozwiążemy równanie kwadratowe $-4x^2 + 5x = 1$ zaczynając od przeniesienia składnika liczbowego na lewą stronę, czyli

$$-4x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Liczymy wyróżnik trójkianu kwadratowego

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1) = 9, \text{ stąd } \sqrt{\Delta} = 3.$$

Rozwiązaniami równania kwadratowego są

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 3}{-8} = 1 \text{ oraz } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 3}{-8} = \frac{1}{4}.$$

Wyznaczamy wartości niewiadomej $y_1 = -4 + 5 = 1$ oraz $y_2 = -1 + 5 = 4$.

Rozwiązania pokrywają się ze współrzędnymi punktów P_1 i P_2 .

Odpowiedź:

Rozwiązaniem układu równań są dwie pary liczb $(\frac{1}{4}, 4)$ i $(1, 1)$.

Słownik

układ równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi

układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego

parabola

parabola jest wykresem funkcji kwadratowej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

okrąg

okrąg to zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu S , zwanego **środkiem okręgu** jest równa ustalonej liczbie r , zwanej **promieniem okręgu**; równaniem okręgu na płaszczyźnie jest

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

gdzie a i b są współrzędnymi środka okręgu, a r jest jego promieniem

hiperbola

hiperbolą nazywamy zbiór punktów płaszczyzny spełniających równanie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$; w szczególności hiperbola jest obrazem krzywej opisanej równaniem $xy = k$ określonym dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $k \neq 0$

prosta

prostą nazywamy zbiór punktów opisanych równaniem ogólnym

$$Ax + By + C = 0$$

gdzie A i B nie mogą być jednocześnie równe zeru; w szczególności prosta jest wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$; równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy równaniem kierunkowym prostej

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami zaprezentowanymi w animacji, a potem spróbuj samodzielnie wykonać Polecenie 2 i Polecenie 3.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dz4rlx0i6>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej problemów prowadzących do rozwiązywania układów równań, z których jedno jest liniowe a drugie kwadratowe.

Polecenie 2

Wyznacz współrzędne punktów wspólnych prostej $3x - y - 3 = 0$ i paraboli $y = x^2 + 2x - 3$.

Polecenie 3

Znajdź liczby których suma jest równa 8, a iloczyn jest równy 12.

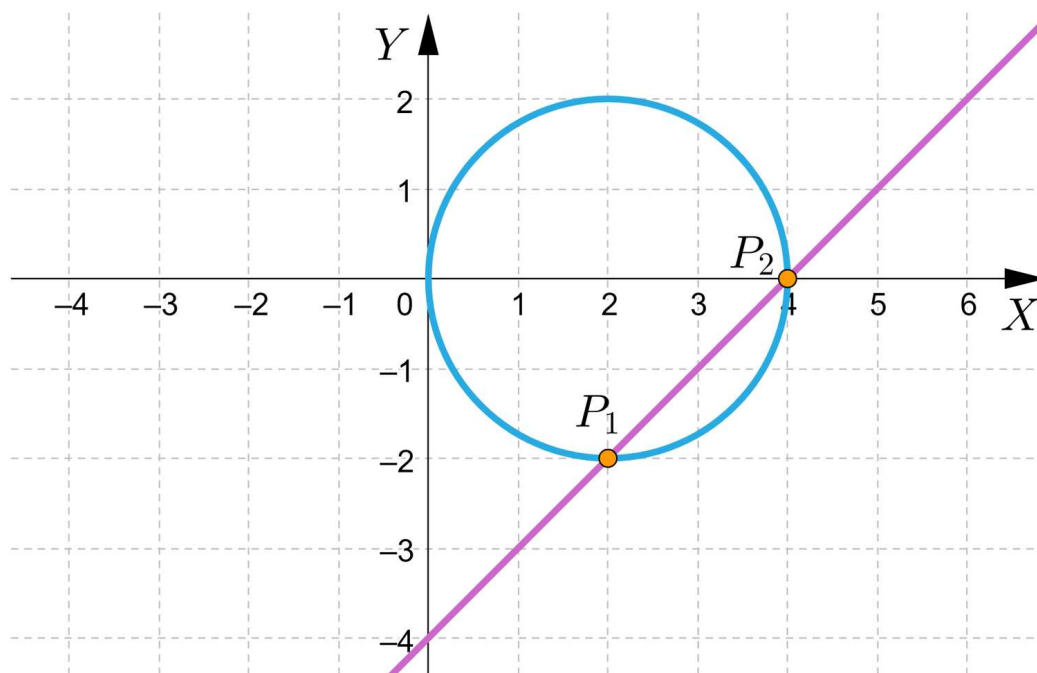
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz układ równań, którego interpretację graficzną przedstawiono na rysunku.



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐
$$\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 4 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} (x + 2)^2 + y^2 = 4 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Które w podanych układów równań mają tylko jedno rozwiązanie? Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

☐ Żaden z podanych układów.

☐
$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

Ćwiczenie 4



Rozwiąż podany układ równań $\begin{cases} xy = 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ i podaj jego interpretację geometryczną.

Ćwiczenie 5



Liczbę 25 przedstaw w postaci sumy dwóch składników, tak aby suma ich kwadratów była równa 313.

Ćwiczenie 6



Suma i iloczyn dwóch liczb są równe 14. Znajdź te liczby.

Ćwiczenie 7



Oblicz obwód trójkąta równoramiennego o polu równym 54, którego podstawa jest trzy razy dłuższa od wysokości.

Ćwiczenie 8



Znajdź długości przekątnych rombu, wiedząc, że jedna z nich jest o 8 dłuższa od drugiej, a bok rombu ma długość $4\sqrt{13}$.

Dla nauczyciela

Autor: Marta Frankowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Problemy prowadzące do rozwiązywania układów równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;

2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;

3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje typ układu równań;
- stosuje różne metody rozwiązywania układów równań;
- przedstawia interpretację geometryczną układu równań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;

- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- analiza przypadku,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa cele lekcji i kryteria sukcesu.
2. Wybrani uczniowie prezentują pozyskane w domu wiadomości.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wspólnie oglądają animację, pracując metodą analizy przypadku.
2. W razie wątpliwości nauczyciel tłumaczy zadania.
3. Wybrani uczniowie wykonują polecenia zamieszczone pod animacją na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
4. Cały zespół klasowy wspólnie rozwiązuje ćwiczenia 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.
5. Nauczyciel dzieli klasę na 3 grupy. Każda grupa rozwiązuje jeden przykład z ćwiczenia 3 z sekcji „Sprawdź się” i odpowiada na pytanie, czy rozwiązanie układu jest punktem styczności prostej i krzywej. Następnie każda grupa rozwiązuje jedno z ćwiczeń 4 – 6 z sekcji „Sprawdź się”. Przedstawiciel każdej z grup prezentuje rozwiązanie na tablicy.
6. Uczniowie w parach wykonują pozostałe ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

- Jeden z uczniów podsumowuje krótko zdobyte wiadomości i ukształtowane umiejętności. Nauczyciel ocenia pracę grup.

Praca domowa:

- Zadaniem uczniów jest narysowanie w jednym układzie współrzędnych dowolnego okręgu i prostej mającej z okręgiem jeden punkt wspólny, a następnie znalezienia postaci algebraicznej odpowiedniego układu równań.

Materiały pomocnicze:

- [Rozwiązywanie równań wielomianowych metodami graficznymi](#)
- [Układy równań typu](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na zajęciach omawiających np. wzajemne położenie prostej i okręgu lub prostej i hiperboli.