

Na ile dokładnie można dopasować prostą do wyników pomiarów?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Grafika interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Na ile dokładnie można dopasować prostą do wyników pomiarów?

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

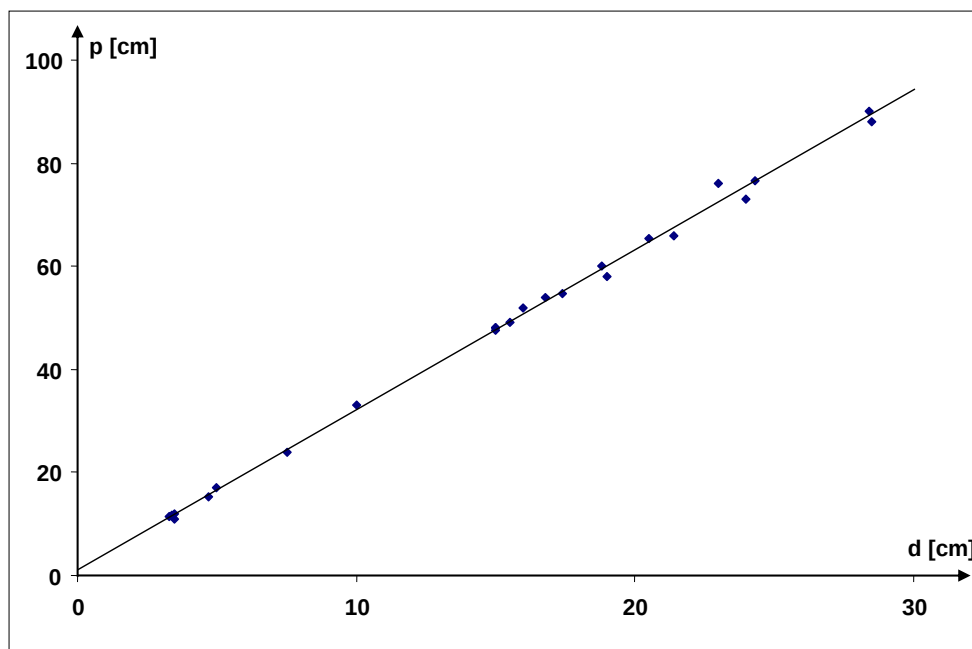
Geometria jest jedną z najstarszych dziedzin matematyki. Czy wiesz może, dlaczego w nazwie jest greckie *metreo* - mierzę? Oto u podstaw tej nauki, całe tysiąclecia temu, legła potrzeba dokonywania pomiarów, w tym pomiarów linii (ich długości) oraz obszarów (ich obwodu i powierzchni) na ziemi. Stąd pierwsza część nazwy. Tak, geometria była kiedyś nauką empiryczną, w której dokonywano pomiarów, uogólniano pewne spostrzeżenia praktyczne i nadawano im - mówiąc dzisiejszym językiem - oprawę teoretyczną.

Jedno z takich spostrzeżeń, poczynionych co najmniej cztery tysiące lat temu, dotyczyło stosunku obwodu koła do jego średnicy. W różnych sytuacjach mierzono obwód i średnicę: basenu w królewskim pałacu, glinianego garnka na wino, oliwę, grubego pnia drzewa, czy innych podobnych obiektów. Ludzi musiało zainteresować, że uzyskiwano zawsze *około* 3:1. Przy odrobinie precyzyjniejszym pomiarze i staranniejszym wyborze obiektów (basen nie musiał być idealnym kołem, tak jak garnek czy tym bardziej pień drzewa), uzyskiwano *nieco więcej* niż 3:1. Ogromnym osiągnięciem było zauważenie, że „obwód do średnicy ma się praktycznie jak 22 do 7”.

Jak dokładnie można zmierzyć wartość liczby  $\pi$ ? Jeśli wyobrazisz sobie pomiar zależności obwodu  $p$  od średnicy  $d$  dla kołowych obiektów o różnych średnicach (zależność ta jest proporcjonalna), to punkty powinny ułożyć się wzdłuż prostej o równaniu:

$$p(d) = \pi \cdot d$$

Powinny, ale przecież mierzymy, więc popełniamy błędy: punkty ułożą się w pobliżu jakiejś prostej, której na wykresie (Rys. a.) nie widać. Współczynnikiem kierunkowym tej prostej jest właśnie liczba  $\pi$ , a jej wyrazem wolnym jest zero. Do punktów pomiarowych należy więc dopasować prostą, korzystając z metody najmniejszych kwadratów i wyznaczyć jej parametry.



Rys. a. Wyniki pomiaru zależności obwodu  $p$  okrągłego przedmiotu od jego średnicy  $d$ , dla 24 przedmiotów. Na tle punktów pomiarowych pokazano prostą dopasowaną metodą najmniejszych kwadratów.

Tę właśnie prostą pokazano na rys. a. Tylko jak określić „niepewność pomiarową” tej prostej?

### Twoje cele

- Objąśnisz, czym różni się wyznaczanie niepewności pomiarowej współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego prostej dopasowanej metodą najmniejszych kwadratów od wyznaczania niepewności pojedynczej wielkości,
- uzasadnisz, dlaczego graficzne metody szacowania dopuszczalnych zakresów zmienności wartości tych współczynników mają ograniczone zastosowanie,
- wskażesz dwa przypadki, w których metodą graficzną można oszacować dopuszczalny zakres zmienności jednego z tych współczynników,
- przeprowadzisz takie oszacowanie w tych dwóch przypadkach.

# Przeczytaj

---

## Warto przeczytać.

### Generalia

Odpowiedź na końcowe pytanie z Wprowadzenia jest formalnie prosta, stanowcza i – być może – niezadowolająca: **Nie ma czegoś takiego, jak niepewność pomiarowa prostej dopasowanej do punktów doświadczalnych** taką czy inną metodą.

Ale można odpowiedzieć na pytanie zastępcze: jak oszacować **niepewność pomiaru parametrów wyznaczających tę prostą**. Wszak gdy badamy liniową zależność pomiędzy dwiema wielkościami,  $y(x)$ , to odpowiednie opracowanie wyniku tego pomiaru pozwala nam wyznaczyć wartości współczynnika kierunkowego **a** oraz wyrazu wolnego **b** tej zależności.

$$y(x) = a \cdot x + b$$

Sposób opracowania oraz możliwe procedury uzyskiwania wyników są opisane w e-materiałach „Jak dopasować prostą do wyników pomiarów” oraz „W jakim celu dopasowuje się prostą do wyników pomiarów i jakie informacje można w ten sposób uzyskać?”. Naturalne jest zadanie pytania o niepewność pomiaru tych parametrów. Pytanie jest ważne, gdy którykolwiek z nich ma interpretację fizyczną – a tak najczęściej jest.

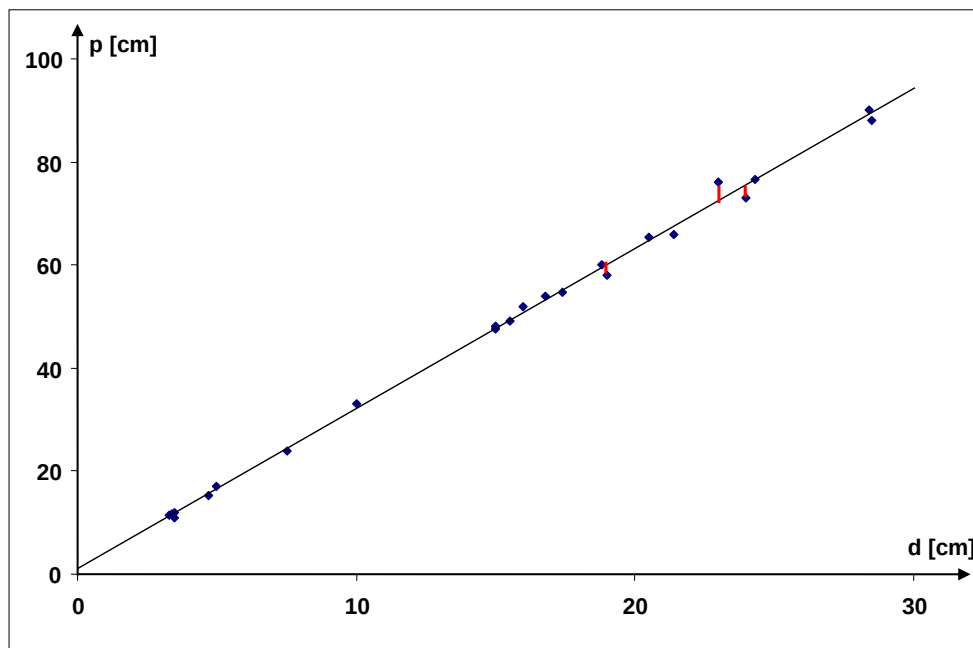
### Niepewność pomiaru parametrów prostej

Niepewność pomiaru tych współczynników zależy od dwóch czynników:

- od odległości („po osi rzędnych”) każdego z punktów od prostej, czyli od rozrzutu uzyskanych wyników,
- od niepewności pomiaru każdej ze współrzędnych każdego punktu.

(Przypomnij sobie e-materiał „Przedstawianie niepewności pomiarowych w formie graficznej”.)

Na rys. 1. przedstawiono wyniki pomiarów zależności  $p(d)$ , wspomniane we Wprowadzeniu. Bezpośredni pomiar średnicy oraz obwodu każdego z obiektów wykonano za pomocą krawieckiego centymetra o rozdzielczości 1 mm. Związane z tym **słupki niepewności standardowej** byłyby na tym wykresie nieczytelne, więc ich nie naniesiono. Zaznaczono natomiast odległości („po osi rzędnych”) dla trzech przykładowych punktów.



Rys. 1. Wyniki pomiaru zależności obwodu  $p$  okrągłego przedmiotu od jego średnicy  $d$ , dla 24 przedmiotów. Na czerwono zaznaczono odległości trzech przykładowych punktów od prostej.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Za pomocą arkusza kalkulacyjnego i gotowej, wbudowanej do niego funkcji, obliczono wartości i **standardowe niepewności** pomiaru parametrów prostej o równaniu

$$p(d) = a \cdot d + b$$

Otrzymano:

$$a = 3,10(0,03)$$

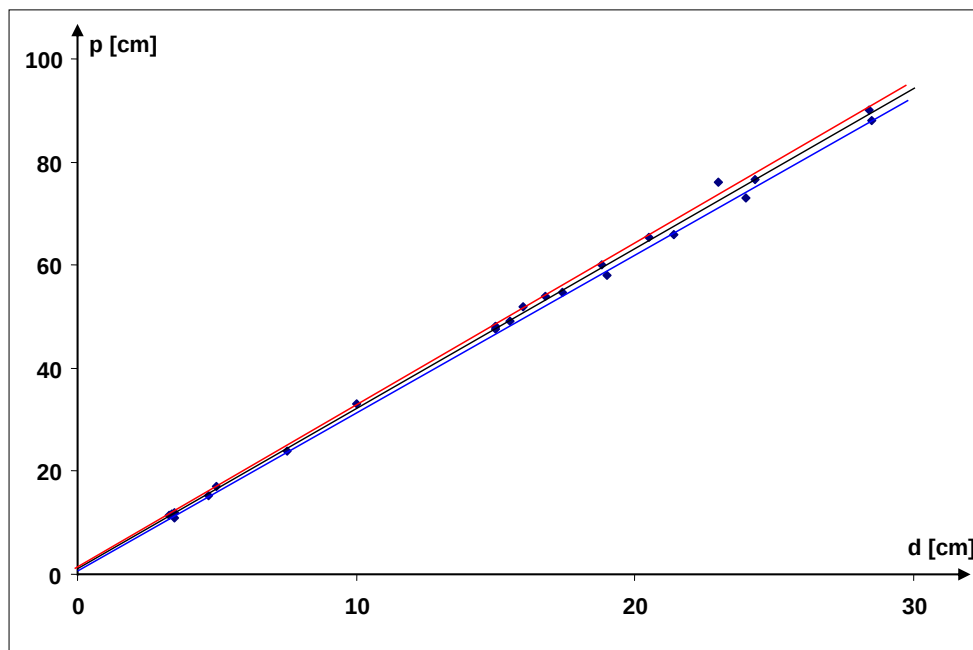
$$b = 1,1(0,5) \text{ cm}$$

Wyrażenia matematyczne, za pomocą których wyliczamy te wartości oraz ich niepewności są skomplikowane - ich znajomość i stosowanie nie są wymagane w szkole średniej.

Dodatkowy, bardzo poważny problem wynika z tego, że oba te współczynniki są wyznaczone jednocześnie, a nie niezależnie jeden od drugiego. Mówimy, że współczynnik kierunkowy prostej i jej wyraz wolny są mierzone w korelacji jeden z drugim. Skutkiem tego jest, że zarówno ich wartości, jak i niepewności są ze sobą powiązane. Dlatego właśnie graficzna interpretacja niepewności obu współczynników jest trudna, a czasami bywa zwodnicza.

**Graficzna interpretacja niepewności standardowych  $a$  oraz  $b$**

Najczęściej stosowane jest nanoszenie na wykres, prócz prostej najlepiej dopasowanej, dwóch prostych „dopasowanych gorzej” (Rys. 2.).



Rys. 2. Na tle wyników pomiarów i prostej najlepiej dopasowanej naniesiono dwie proste "gorzej dopasowane".

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>

Problem w tym, że nie ma jednoznacznego przepisu na wybór tych prostych. Na rys. 2. zastosowano przepis idący ku „skrajnemu” pogorszeniu przebiegu:

Prosta czerwona ma równanie

$$p_c(d) = a_c \cdot d + b_c; \text{ gdzie } a_c = (a + u(a)) \text{ a } b_c = (b + u(b))$$

więc ma **zawyżone** zarówno nachylenie jak i przesunięcie w zerze.

Prosta niebieska z kolei ma równanie

$$p_n(d) = a_n \cdot d + b_n; \text{ gdzie } a_n = (a - u(a)) \text{ a } b_n = (b - u(b))$$

zatem jej nachylenie i przesunięcie w zerze są **zaniżone**.

Jednak statystyczna interpretacja takiego wyboru i związanego z nim przebiegu prostych gorzej dopasowanych na tle punktów pomiarowych nie wnosi niczego wartościowego do interpretacji wyników pomiarów. Powodem tego stanu rzeczy jest właśnie współzależność (korelacja) pomiędzy wartościami obu współczynników. Nie ma dobrej odpowiedzi na pytanie, dlaczego nie wybrano prostych gorzej dopasowanych w taki sposób, że ich współczynniki ( $a'$ ;  $b'$ ) oraz ( $a''$  i  $b''$ ) spełniałyby warunki:

$$a' = (a + u(a)) \quad a \quad b' = (b - u(b)) \quad \text{oraz} \quad a'' = (a - u(a)) \quad \text{oraz} \quad b'' = (b + u(b))$$

W naszym przypadku te dwie proste byłyby na wykresie nieczytelne. Jednak w przypadku zależności, w której  $a < 0$ , byłyby inaczej.

## Graficzne szacowanie dopuszczalnego zakresu zmienności $a$ i $b$

Z tych samych powodów - korelacja pomiędzy współczynnikami - stosowane często postępowanie odwrotne prowadzi do wyników bezwartościowych z punktu widzenia statystyki. Polega ono na poprowadzeniu pary prostych „ledwie dopasowanych”, czyli takich, pomiędzy którymi „z ledwością” mieszczą się **wszystkie** punkty pomiarowe. Czasami stawia się inny warunek, „łagodniejszy” (pomiędzy prostymi nie musi się mieścić punkt, byle mieścił się choćby fragment słupka jego niepewności pomiarowej). Można też postawić warunek „ostrzejszy” (opisany w **Przykładzie 1.**).

Celem takiego postępowania jest graficzne oszacowanie maksymalnej granicy przedziałów, w których mieszczą się wartości obu współczynników. Odczytuje się więc - z wykresu - współczynniki tych prostych i traktuje się je, odpowiednio, jako maksymalną i minimalną wartość współczynnika  $a$  oraz współczynnika  $b$ .

To postępowanie jest jednak niejednoznaczne i stosowane **niezależnie** przez różne osoby często daje zaskakująco różne efekty. Podstawową przyczyną tej niejednoznaczności jest naturalne, ludzkie dążenie do jednoczesnego zmieniania nachylenia oraz punktu przecięcia w zerze prostej „ledwie dopasowanej” przy próbie ustalenia jej przebiegu. Tymczasem **wielkości te są statystycznie skorelowane** - intuicyjne, graficzne uwzględnienie tego faktu jest praktycznie niemożliwe.

### Ważne!

Opisane wyżej postępowanie **nie prowadzi do wyznaczenia niepewności pomiarowej współczynników  $a$  oraz  $b$** , ani nawet do jakiegokolwiek ich oszacowania. Daje ono jedynie „pewność”, że przy przyjętych kryteriach wartości tych współczynników nie wykraczają poza uzyskany przedział.

Zbliżone postępowanie może dawać nieco bardziej wiarygodne wyniki oszacowania granic przedziału, w którym „na pewno” mieści się jeden z parametrów prostej. Jest tak, **gdy drugi z nich znamy dokładnie**. Tak może być, gdy ten drugi parametr ma wartość wyrażoną za pomocą uniwersalnych stałych fizycznych lub za pomocą liczby niemianowanej o wartości wynikającej z teoretycznego opisu badanej zależności.

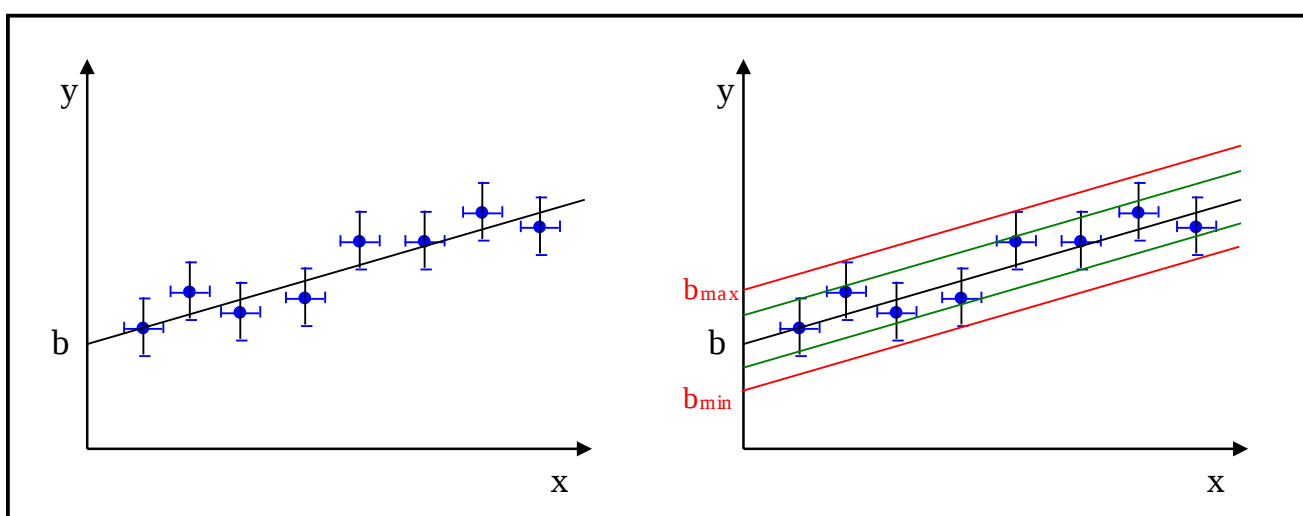
### Przykład 1. Znamy dokładnie nachylenie prostej.

Często prowadzimy badanie zależności w celu wykazania... braku zależności pomiędzy badanymi wielkościami. Wtedy oczekujemy, że w równaniu prostej

$$y(x) = a \cdot x + b$$

współczynnik kierunkowy  $a = 0$ , a prawo przyrody, którego stosowalność chcemy zbadać, ma postać  $y = \text{const}$ , niezależnie od  $x$ . Rzadsze są przypadki, w których potrafimy przewidzieć inną niż zero, ustaloną wartość tego współczynnika.

Ale w każdym przypadku, gdy współczynnik ten ma ustaloną wartość, graficzne poszukiwanie prostych „ledwie dopasowanych” wymaga jedynie równoległego ich przesuwania w stosunku do prostej najlepiej dopasowanej (Rys. 3.), czyli tylko zmiany wyrazu wolnego  $b$ .



Rys. 3. Z lewej punkty pomiarowe z ich standardowymi niepewnościami i najlepiej dopasowaną do nich prostą. Po prawej pokazano parę prostych zielonych, pomiędzy którymi mieszczą się wszystkie punkty pomiarowe. Dla czytelności nie naniesiono odpowiadających im wartości  $b_{\min}$  oraz  $b_{\max}$

Pomiędzy prostymi czerwonymi mieszczą się nie tylko wszystkie punkty ale także słupki ich niepewności.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Dwie wartości,  $b_{\min}$  i  $b_{\max}$ , ograniczają przedział, w którym „z pewnością” mieści się prawdziwa wartość wyrazu wolnego  $b$ . Jednak pomiędzy prostymi zielonymi mieszczą się jedynie punkty pomiarowe, zaś pomiędzy prostymi czerwonymi mieszczą się także słupki ich standardowych niepewności. Nie ma sposobu obiektywnego rozstrzygnięcia, które z tych kryteriów jest bardziej wiarygodne.

### Przykład 2. Znamy dokładnie wyraz wolny prostej.

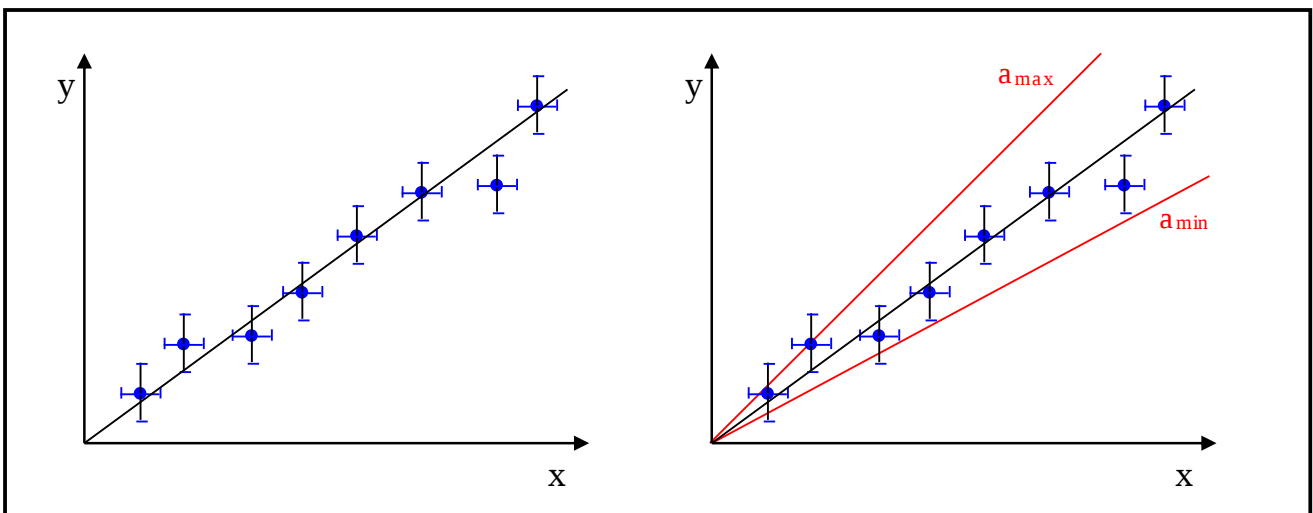
Często prowadzimy badanie zależności **proporcjonalnej** pomiędzy badanymi wielkościami. Wtedy oczekujemy, że w równaniu prostej

$$y(x) = a \cdot x + b$$

wyraz wolny  $b = 0$ . Rzadsze są przypadki, w których wyraz wolny różny od zera jest znany dokładnie, a zależność przyjmie klasyczną postać zależności proporcjonalnej.

$$y(x) = a \cdot x$$

W takich sytuacjach możemy poprowadzić prostą najlepiej dopasowaną, ale uwzględniającą warunek, że musi ona przechodzić przez punkt  $(0; 0)$  układu współrzędnych (Rys. 4).



Rys. 4. Z lewej punkty pomiarowe z ich standardowymi niepewnościami i najlepiej dopasowaną do nich prostą. Jej przebieg przez punkt  $(0; 0)$  wynika z postawionego warunku.

Po prawej pokazano parę czerwonych prostych "ledwo dopasowanych". Pomiędzy nimi mieszczą się nie tylko wszystkie punkty ale także słupki niepewności większości z nich.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Dwie wartości,  $a_{\min}$  i  $a_{\max}$ , ograniczają przedział, w którym „z pewnością” mieści się prawdziwa wartość współczynnika kierunkowego  $a$ . Nachylenie każdej z tych prostych wyznacza się graficznie.

Nie ma jednak sposobu obiektywnego rozstrzygnięcia, czy którakolwiek z tych prostych nie powinna być nieco mniej lub nieco bardziej nachylona.

## Słowniczek

### Niepewność pomiarowa

(ang. *measurement uncertainty*) wielkość charakteryzująca dokładność wykonanego pomiaru, uwzględniająca ilościowo różne czynniki wpływające na tę dokładność.

### Niepewność pomiarowa standardowa

(ang. *uncertainty of measurement*) zwana również niepewnością standardową - niepewność pomiaru wielkości fizycznej, oznaczana symbolem  $u$ , związana zarówno z rozrzutem wyników (uzyskanych w serii niezależnych pomiarów, dokonanych w powtarzalnych warunkach), jak i z właściwościami przyrządu pomiarowego.

### **parametry zależności liniowej**

(ang. *linear function parameters*) także parametry prostej. W reprezentacji funkcji liniowej w postaci

$$y(x) = a \cdot x + b$$

- parametr  $a$  to współczynnik kierunkowy prostej; określa jej nachylenie względem osi odciętych,
- parametr  $b$  to wyraz wolny prostej; określa punkt jej przecięcia z osią rzędnych.

### **Słupki niepewności**

(ang.: *error bars*) - (żargonowa nazwa: słupki błędów) forma graficznego przedstawienia standardowej niepewności pomiarowej w postaci odcinka. Słupek kreśli się tak, by środek znajdował się w punkcie pomiarowym, a długość każdego z jego ramion odpowiadała standardowej niepewności pomiarowej.

# Grafika interaktywna

---

## Dopasuj prostą do punktów

Prosta jest najlepiej dopasowana do punktów pomiarowych, gdy suma kwadratów odległości „wzdłuż osi rzędnych” tych punktów od prostej jest najmniejsza z możliwych. Takie kryterium jest powszechnie przyjmowane przy opracowywaniu wyników pomiarów.

Oznaczmy tę sumę przez  $S_0$ .

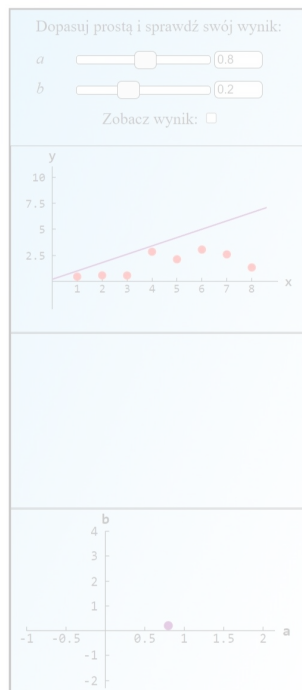
Mamy prawo dopasować prostą „na oko”, bez korzystania z oprogramowania (np. arkusza kalkulacyjnego) z zaimplementowanymi wzorami na wartości parametrów  $a$  oraz  $b$ , które zapewniają takie właśnie optymalne dopasowanie prostej do punktów. Tak dopasowana prosta będzie - najprawdopodobniej - inna niż ta optymalna. Ją także charakteryzuje suma odległości punktów - oznaczmy ją przez  $S$ . Suma ta będzie większa niż  $S_0$ , ewentualnie równa  $S_0$ , to zrozumiałe.

Przyjmijmy, że miarę dopasowania prostej jest iloraz  $\frac{S_0}{S}$  i wyrażajmy go w procentach.

### Polecenie 1

Wykorzystaj grafikę i sprawdź, na ile dokładnie potrafisz dopasować prostą do chmury losowo ułożonych punktów. Mianem celności określa się tam właśnie iloraz  $\frac{S_0}{S}$ . Nie zrażaj się początkowymi niepowodzeniami - wyniki powyżej 90% są naprawdę trudne do uzyskania i wymagają niemałej praktyki.

Przy okazji zwróć uwagę na trudność, jaką sprawia konieczność operowania dwoma parametrami.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DvqvryqXR>

### Polecenie 2

Namów koleżankę czy kolegę do drobnej rywalizacji o to, kto w dziesięciu próbach uzyska najwyższą średnią miarę dopasowania.




Możecie dodatkowo utrudnić sobie zadanie - ograniczcie czas na ustawianie prostej, licząc od kliknięcia „Jeszcze raz”. Po tym czasie grający nie może już zmieniać wartości parametrów i tylko sprawdza swój wynik.

### Polecenie 3

Zapewne udało Ci się odkryć drugą możliwość, jaką daje grafika. Opisz, w kilku punktach, te możliwości. Zastosuj konwencję, w której przygotowujesz instrukcję obsługi dla anonimowego użytkownika tej grafiki.

Porównaj swój opis z wzorcowym rozwiązaniem tego problemu.

# Sprawdź się

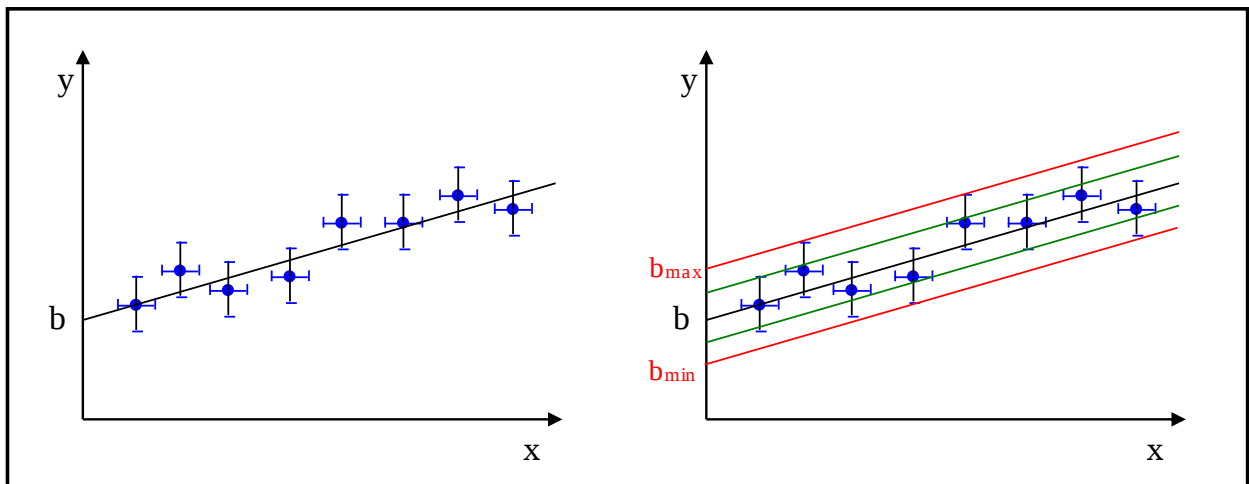
Pokaż ćwiczenia:   

## Sprawdź się

### Ćwiczenie 1



W przykładzie 1. opisano dwa kryteria prowadzenia prostych „ledwo dopasowanych” do punktów pomiarowych.



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Określ, które z tych kryteriów, dla prostych czerwonych czy dla prostych zielonych, jest bardziej wymagające (ostrzejsze). Uzasadniając swój wybór porównaj rozmiary przedziałów ( $b_{\min}$  ;  $b_{\max}$ ) uzyskanych na podstawie tych kryteriów.

## Ćwiczenie 2



W zjawisku fotoelektrycznym maksymalne napięcie hamowania  $U_h$  elektronów wybitych z fotokatody o ustalonej pracy wyjścia  $W$  jest liniową funkcją częstotliwości  $\nu$  padającego światła:

$$U_h = a \cdot \nu + b$$

Doświadczalnie zmierzono napięcie hamowania dla każdej z kilkunastu różnych częstotliwości światła padającego na fotokatodę. Uzupełnij poprawnie poniższy tekst.

Gdy celem badania jest wyznaczenie wartości  $W$  dla określonej fotokatody, to w podanej zależności można uznać, że  jest znany dokładnie. Wyraża się on bowiem jako , gdzie  $e$  jest ładunkiem elementarnym a  $h$  jest stałą Plancka. Z kolei  służy do wyznaczenia pracy wyjścia zgodnie z równaniem .

iloraz  $h/e$

$$W = e \cdot b$$

$$W = h \cdot a$$

wyraz wolny  $a$

wyraz wolny  $b$

współczynnik kierunkowy  $b$

iloraz  $e/h$

iloczyn  $e \cdot h$

$$W = e \cdot a$$

współczynnik kierunkowy  $a$

$$W = h \cdot b$$

## Ćwiczenie 3



W poprzednim zadaniu opisano pewne podejście do opracowania wyniku eksperymentu. Zastrzeżono jednak, że jest ono stosowalne przy narzuceniu specyficznego celu prowadzonym pomiarom. Podaj przykład innego celu tego samego eksperymentu, w którym to postępowanie nie byłoby uzasadnione. Zapisz podany przykład, wraz z krótkim uzasadnieniem różnicy, w przygotowanym polu i porównaj z wzorcowym wyjaśnieniem.

### Wspólna treść do ćwiczeń 4-8

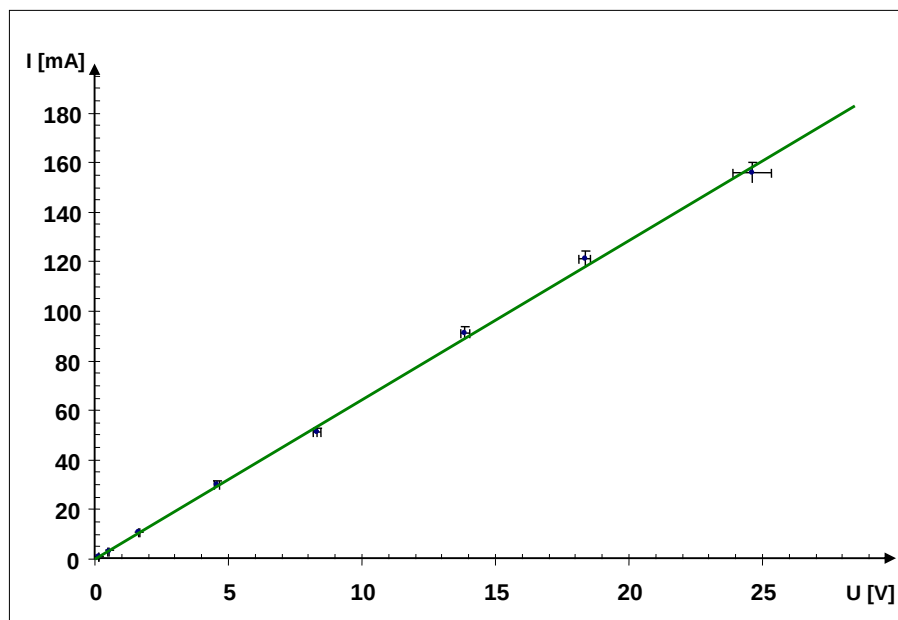
W pracowni fizycznej znaleziono stary, zakurzony opornik, którego wartość nominalna nie dawała się w pełni odczytać. Była trzycyfrowa, wyrażała się w omach, a ostatnia cyfra była zerem.

**Problem:** Jakie mogły być dwie pierwsze cyfry?

By to ustalić, zbadano charakterystykę napięciowo-prądową tego opornika - przeczytaj o tym w e-materiale „Jak doświadczalnie wyznaczyć charakterystykę prądowo napięciową elementu obwodu?”

Wykonano pomiar zależności natężenia prądu  $I$  płynącego przez opornik od przyłożonego doń napięcia  $U$ . Wartości obu tych zmiennych mierzono szkolnymi multimetrami, których dokładność była uzależniona zarówno od nastawionego zakresu, jak i od mierzonej wartości.

Na wykresie przedstawiono wyniki pomiaru z ledwie czytelnymi słupkami niepewności pomiarowej. Prosta dopasowana została metodą najmniejszych kwadratów, z wymuszonym przejściem przez punkt  $(0; 0)$ .



Charakterystyka napięciowo-prądowa opornika z najlepiej dopasowaną prostą poprowadzoną przez punkt  $(0; 0)$ .

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja:  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

## Ćwiczenie 4



Wskaż najbardziej trafne i ogólne uzasadnienie dla wymuszenia przejścia prostej przez punkt (0; 0).



Charakterystyka napięciowo-prądowa dowolnego elementu obwodu musi przechodzić przez punkt (0; 0).



Na początku pomiarów zbadano zapewne zmontowany obwód przed włączeniem zasilacza do sieci. Oba mierniki wskazywały zero, nawet na najczulszych zakresach.



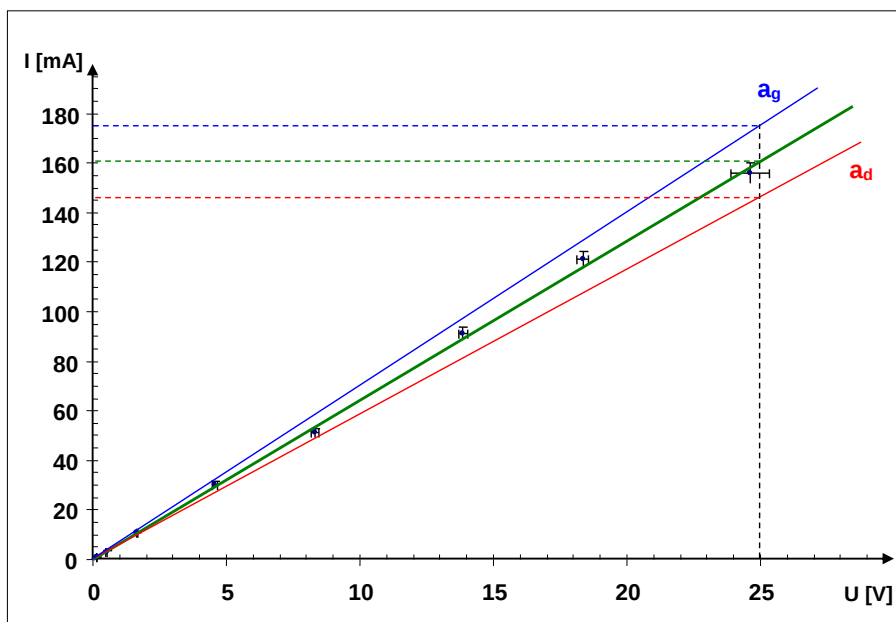
Prawo Ohma przewiduje, że dla **liniowych** elementów obwodu natężenie prądu jest proporcjonalne do przyłożonego napięcia. Opornik, choć stary, pozostaje liniowym elementem obwodu.



Takie wymuszenie przejścia przez punkt (0; 0) nie ma formalnej podbudowy. Jest stosowane, by uwiarygodnić oszacowanie skrajnych dopuszczalnych wartości nachylenia prostej, bez uwzględniania zmian wyrazu wolnego.

### Ciąg dalszy treści do ćwiczeń 5-8

Wykres uzupełniono dwiema prostymi - czerwoną o nachyleniu  $a_d$  oraz niebieską o nachyleniu  $a_g$ . Proste dobrano w taki sposób, by zapewnić objęcie nimi obszaru, wewnątrz którego mieszczą się wszystkie punkty pomiarowe oraz standardowe niepewności większości z nich. Odczytano rzędne trzech przerywanych linii pomocniczych: czerwonej 146 mA, zielonej 161 mA oraz niebieskiej 175 mA.



Charakterystyka napięciowo-prądowa opornika uzupełniona dwiema prostymi "ledwo dopasowanymi".

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

### Ćwiczenie 5



Oblicz na tej podstawie nachylenia  $a_d$  oraz  $a_g$ . Wskaż właściwy wynik zaokrąglony do minimalnej liczby cyfr znaczących, która pozwoli rozstrzygnąć postawiony problem.

$a_d =$ 
  / 
   / 
   / 
   
 mA/V  / 
 V/mA  / 
 mA·V  .

$a_g =$ 
  / 
   / 
   / 
   
 1/Ω  / 
 1/kΩ  / 
 Ω  / 
 k/Ω  .

### Ćwiczenie 6



Oblicz wartości trzech oporów odpowiadających, kolejno, prostej niebieskiej, zielonej i czerwonej. Wpisz wyniki zaokrąglone do minimalnej liczby cyfr znaczących, która pozwoli rozstrzygnąć postawiony problem.

$R_g =$   Ω;

$R =$   Ω;

$R_d =$   Ω;

## Ćwiczenie 7



Rozstrzygnij postawiony problem - jakie dwie cyfry na oporniku były nie do odczytania?

## Ćwiczenie 8



Wskaż najbardziej trafny zapis wyniku całego eksperymentu.

$R = 160_{(20)}^{(10)} \Omega$

$R \in \{140 \Omega ; 150 \Omega ; 160 \Omega ; 170 \Omega\}$

$R = 155 \Omega \pm 15 \Omega$

$R \in \langle 140 \Omega ; 170 \Omega \rangle$

# Dla nauczyciela

---

## Konspekt (scenariusz) lekcji

<b>Imię i nazwisko autora:</b>	Agata Fronczak Włodzimierz Natorf
<b>Przedmiot:</b>	Fizyka
<b>Temat zajęć:</b>	<b>Jak dokładnie można zmierzyć liczbę <math>\pi</math>?</b>
<b>Grupa docelowa:</b>	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony
<b>Podstawa programowa:</b>	<p><b>Cele kształcenia – wymagania ogólne</b></p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p>III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji oraz doświadczeń i wnioskowanie na podstawie ich wyników.</p> <p><b>Zakres podstawowy</b></p> <p><b>Treści nauczania – wymagania szczegółowe</b></p> <p>I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:</p> <p>9) dopasowuje prostą do danych przedstawionych w postaci wykresu; interpretuje nachylenie tej prostej i punkty przecięcia z osiami.</p> <p><b>Zakres rozszerzony</b></p> <p><b>Treści nauczania – wymagania szczegółowe</b></p> <p>I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:</p> <p>9) dopasowuje prostą do danych przedstawionych w postaci wykresu; interpretuje nachylenie tej prostej i punkty przecięcia z osiami.</p>
<b>Kształtowane kompetencje kluczowe:</b>	<p><b>Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,</li><li>• kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,</li><li>• kompetencje cyfrowe,</li><li>• kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.</li></ul>

<b>Cele operacyjne:</b>	<p>Uczeń:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. wie, co to znaczy dopasować prostą, zarówno w sensie graficznym, jak i rachunkowym;</li> <li>2. zna i rozumie kryterium dopasowania prostej poprzez szukanie minimalnej wartości jej odległości od punktów pomiarowych;</li> <li>3. zna zasadę najmniejszych kwadratów, tj. poszukiwania najmniejszej wartości sumy kwadratów odległości od prostej;</li> <li>4. zna wzory umożliwiające wyznaczenie parametrów prostej oraz ich niepewności w ramach metody najmniejszych kwadratów;</li> <li>5. potrafi dopasować prostą do punktów pomiarowych na wykresie i na tej podstawie wyznaczyć parametry dopasowania i ich niepewności.</li> </ol>
<b>Strategie nauczania:</b>	nauczanie przez dociekanie IBSE
<b>Metody nauczania:</b>	pomiary uczniowskie i ich interpretacja
<b>Formy zajęć:</b>	praca w dwuosobowych grupach i całego zespołu klasowego
<b>Środki dydaktyczne:</b>	komputer z rzutnikiem i oprogramowaniem typu arkusz kalkulacyjny; globus szkolny; obiekty o symetrii sferycznej lub walcowej o różnych średnicach, co najmniej do 20–30 cm (np. piłki, piłeczki, odważniki, szklanki, garnki, tarcze, itp.), łącznie po dwie–trzy sztuki na dwuosobową grupę uczniowską; centymetry krawieckie (np. udostępniane w marketach budowlanych papierowe taśmy miernicze), co najmniej jedna sztuka na grupę
<b>Materiały pomocnicze:</b>	niniejszy e-materiał
<b>PRZEBIEG LEKCJI</b>	
<b>Faza wprowadzająca:</b>	
<p>Wprowadzenie według treści zawartej w części „Czy to nie ciekawe?”, także na podstawie własnej wiedzy nauczyciela, o historii liczby <math>\pi</math>. Nauczyciel przedstawia, z punktu widzenia archetypowego „starożytnego inżyniera”, problem związany z możliwie dokładną znajomością wartości liczby <math>\pi</math>.</p> <p>Uczniowie proponują sposoby pomiaru tej wartości. Nauczyciel wskazuje ograniczenia metody polegającej na pomiarze średnicy i obwodu tylko jednego obiektu: „starożytny inżynier” nie miał gwarancji, że stosunek ten jest stały i czy nie zmienia się, przykładowo, wraz ze wzrostem średnicy. Jako przykład takiej możliwości nauczyciel podaje stosunek pola powierzchni wycinka sfery do promienia tego wycinka, mierzonego „po sferze”. Demonstruje taką sytuację za pomocą globusa.</p>	

**Faza realizacyjna:**

Uczniowie mierzą, w dwuosobowych grupach, średnicę i obwód dwóch-trzech obiektów. Nauczyciel zwraca uwagę, że bardzo istotna w tym doświadczeniu jest uczciwość: obie wielkości powinny pochodzić z pomiaru, a nie średnica z pomiaru a obwód z przemnożenia wyniku przez znaną wartość  $\pi$ .

Wyniki pomiarów nauczyciel wprowadza sukcesywnie do arkusza kalkulacyjnego.

Uczniowie komentują ułożenie punktów na wykresie. Wnioskiem z krótkiej dyskusji powinno być stwierdzenie, że punkty układają się na linii prostej, przechodzącej przez punkt (0; 0).

Nauczyciel uruchamia multimedium i proponuje dwóm-trzem uczniom intuicyjne dopasowanie prostej do układu punktów. Uczniowie powinni zgodzić się, że trafienie tą metodą w bezpośrednie sąsiedztwo prostej najlepiej dopasowanej jest bardzo trudne.

Nauczyciel nanosi na wykres z arkusza linię prostą, wychodzącą z punktu (0; 0).

Uczniowie ustalają, czy można tę prostą uznać za najlepiej dopasowaną. Nauczyciel koryguje nachylenie prostej, aż do uznania przez klasę, że jest ono optymalne.

W podobnej procedurze jak poprzednio, uczniowie ustalają dwie proste „skrajne”, także przechodzące przez (0; 0). Jedna winna mieć nachylenie minimalne, druga maksymalne, dopuszczalne ułożeniem punktów pomiarowych.

Uczniowie obliczają współczynniki kierunkowe trzech prostych.

**Faza podsumowująca:**

Nauczyciel zwraca uwagę, że intuicyjne prowadzenie prostej „najlepiej dopasowanej” odbywa się zgodnie z jednoznacznym kryterium: minimalizacja sumy kwadratów odległości - liczonych wzdłuż rzędnej - poszczególnych punktów od prostej. Choć ocena spełnienia tego kryterium ma charakter jakościowy, to tak uzyskane nachylenie prostej „najlepiej dopasowanej” może być uznane za przybliżenie wartości liczbowej  $\pi$ . Nauczyciel przeciwstawia temu „skrajne” wartości nachylenia. Ich uzyskanie nie polega na spełnieniu jakiegokolwiek kryterium o charakterze statystycznym - jest czysto uznaniowe. Nauczyciel podkreśla, że nachylenia te nie wyznaczają przedziału niepewności pomiarowej. Pokazują jedynie zakres, w którym na pewno powinna się zmieścić mierzona wartość.

**Praca domowa:**

Nauczyciel udostępnia wszystkim uczniom wyniki pomiarów.

Uczniowie, w tych samych grupach, co w klasie, rozważają celowość naniesienia na punkty pomiarowe odcinków standardowych niepewności pomiaru średnicy i obwodu, wynikające z rozdzielczości użytych miarek. Nanoszą te niepewności pod warunkiem, że są one czytelne. Ponownie próbują ustalić przebieg dwóch prostych „skrajnych”, stosując procedurę z lekcji, ale z uwzględnieniem tych odcinków. Obliczają nachylenia tych prostych.

Na następnej lekcji uczniowie porównują otrzymane wyniki, oddzielnie dla nachylenia każdej z dwóch prostych i komentują rozrzut.

**Wskazówki  
metodyczne  
opisujące  
różne  
zastosowania  
danego  
multimedium:**

Multimedium może służyć uczniom jako ćwiczenie umiejętności intuicyjnego określania przebiegu prostej najlepiej dopasowanej do dowolnego zestawu punktów pomiarowych.