



Wykres i własności funkcji kwadratowej

$$y = a(x - p)^2$$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Z wykresem funkcji kwadratowej spotykamy się często w życiu codziennym. Na przykład w architekturze, obiekt architektoniczny w Saint Luis w USA, zwany Gateway Arch, ma kształt 192 - metrowej paraboli. W materiale omówimy przekształcenie wykresu funkcji kwadratowej wzdłuż osi X układu współrzędnych. Oprócz wykresu, do odczytywania i wyznaczania własności funkcji kwadratowej po przesunięciu jej wykresu, możemy wykorzystać także wzór funkcji.

Twoje cele

- Określisz różnice pomiędzy wykresami funkcji zadanych wzorami $y = ax^2$ oraz $y = a(x - p)^2$.
- Wyznaczysz wzór funkcji $y = a(x - p)^2$ na podstawie informacji o jej wykresie.
- Określisz własności funkcji określonej wzorem $y = a(x - p)^2$ na podstawie wzoru oraz wykresu.

Przeczytaj

Definicja: funkcja kwadratowa

Funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$ nazywamy funkcją kwadratową.

Zajmiemy się wykresem oraz własnościami **funkcji kwadratowej**, gdy jest określona za pomocą wzoru $f(x) = a(x - p)^2$, gdzie $a, p \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$.

Wykres funkcji kwadratowej nazywamy parabolą. W **paraboli** możemy wyróżnić wierzchołek oraz ramiona.

Określimy własności funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = a(x - p)^2$, gdzie $a, p \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$, jeżeli:

- $a > 0$,
- $a < 0$.

Własności funkcji kwadratowej określonej wzorem

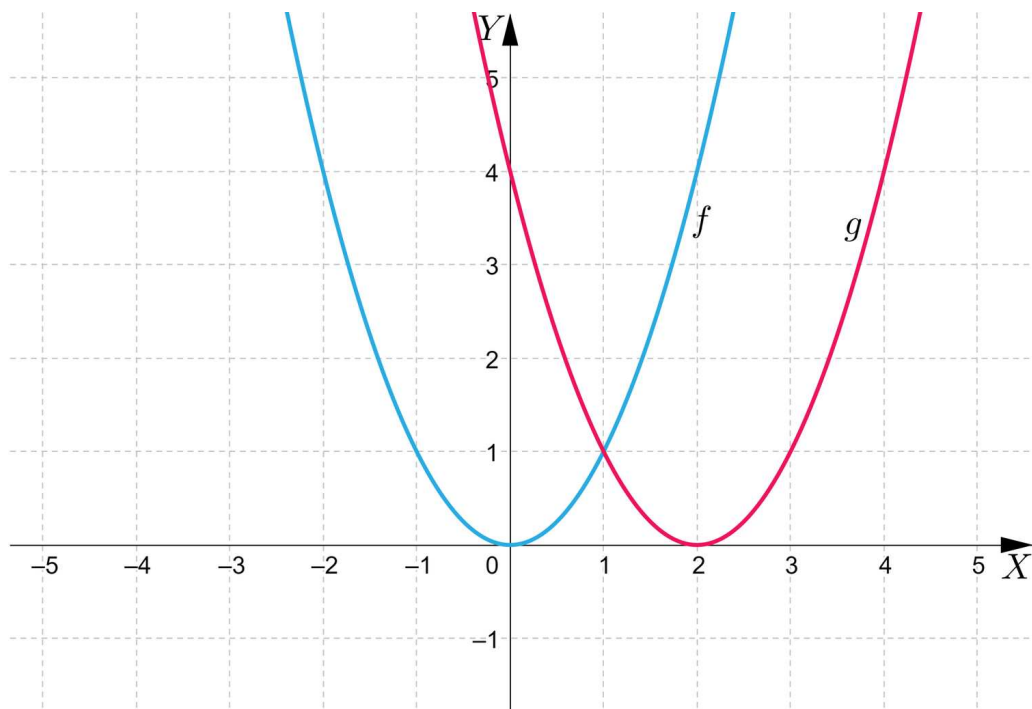
$f(x) = a(x - p)^2$, gdzie $a, p \in \mathbb{R}$, dla $a > 0$

Naszkicujemy wykresy funkcji kwadratowych określonych wzorami $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = (x - 2)^2$.

W tym celu, w tabelach przedstawimy wartości tych funkcji dla kilku argumentów.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4
x	0	1	2	3	4
$g(x)$	4	1	0	1	4

Wykresy tych funkcji naszkicujemy w jednym układzie współrzędnych.



Na podstawie wykresów funkcji f i g określmy własności tych funkcji:

Własności funkcji f		Własności funkcji g	
dziedzina: $x \in \mathbb{R}$		dziedzina: $x \in \mathbb{R}$	
zbiór wartości: $y \in \langle 0, \infty \rangle$		zbiór wartości: $y \in \langle 0, \infty \rangle$	
funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$		funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 2)$	
funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 0, \infty \rangle$		funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 2, \infty \rangle$	
funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 0 dla $x = 0$		funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 0 dla $x = 2$	
Własności wykresu funkcji f		Własności wykresu funkcji g	
ramiona paraboli są skierowane do góry		ramiona paraboli są skierowane do góry	
oś symetrii: $x = 0$		oś symetrii: $x = 2$	
wierzchołek: $(0, 0)$		wierzchołek: $(2, 0)$	

Niezależnie od wyboru wartości współczynnika a , gdy $a > 0$, dla funkcji kwadratowych określonych wzorami $f(x) = ax^2$ oraz $g(x) = a(x - p)^2$ zachodzą następujące własności:

Własności funkcji f		Własności funkcji g	
dziedzina: $x \in \mathbb{R}$		dziedzina: $x \in \mathbb{R}$	
zbiór wartości: $y \in \langle 0, \infty \rangle$		zbiór wartości: $y \in \langle 0, \infty \rangle$	
funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$		funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, p)$	

Własności funkcji f		Własności funkcji g	
funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 0, \infty \rangle$		funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle p, \infty \rangle$	
funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 0 dla $x = 0$		funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 0 dla $x = p$	
Własności wykresu funkcji f		Własności wykresu funkcji g	
ramiona paraboli są skierowane do góry		ramiona paraboli są skierowane do góry	
oś symetrii: $x = 0$		oś symetrii: $x = p$	
wierzchołek: $(0, 0)$		wierzchołek: $(p, 0)$	

Własności funkcji kwadratowej określonej wzorem

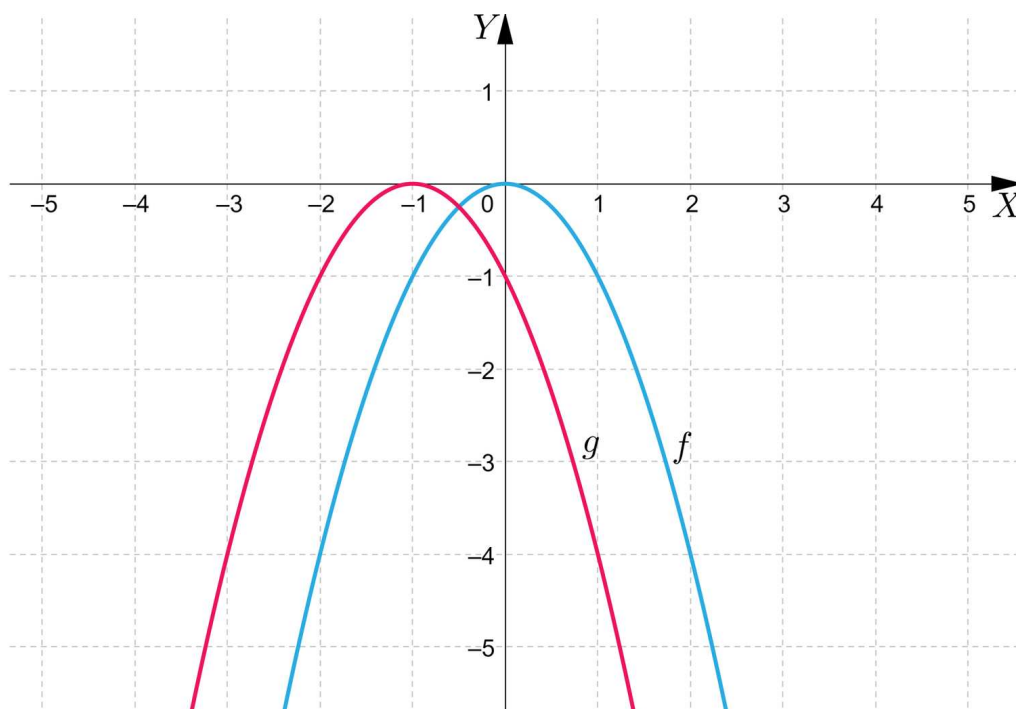
$$f(x) = a(x - p)^2, \text{ gdzie } a, p \in \mathbb{R}, \text{ dla } a < 0$$

Naszukujemy wykresy funkcji kwadratowych określonych wzorami $f(x) = -x^2$ oraz $g(x) = -(x + 1)^2$

W tym celu, w tabelach przedstawimy wartości tych funkcji dla kilku argumentów.

Argumenty i własności funkcji f					
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4
Argumenty i własności funkcji g					
x	-3	-2	-1	0	1
$g(x)$	-4	-1	0	-1	-4

Wykresy tych funkcji przedstawimy w jednym układzie współrzędnych.



Na podstawie wykresów funkcji f i g określmy własności tych funkcji:

Własności funkcji f	Własności funkcji g
dziedzina: $x \in \mathbb{R}$	dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
zbiór wartości: $y \in (-\infty, 0)$	zbiór wartości: $y \in (-\infty, 0)$
funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$	funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -1)$
funkcja jest malejąca w przedziale $\langle 0, \infty)$	funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -1, \infty)$
funkcja przyjmuje wartość największą równą 0 dla $x = 0$	funkcja przyjmuje wartość największą równą 0 dla $x = -1$
Własności wykresu funkcji f	Własności wykresu funkcji g
ramiona paraboli są skierowane do dołu	ramiona paraboli są skierowane do dołu
oś symetrii: $x = 0$	oś symetrii: $x = -1$
wierzchołek: $(0, 0)$	wierzchołek: $(-1, 0)$

Niezależnie od wyboru wartości współczynnika a , gdy $a < 0$, dla funkcji kwadratowych określonych wzorami $f(x) = ax^2$ oraz $g(x) = a(x - p)^2$ zachodzą następujące własności:

Własności funkcji f	Własności funkcji g
dziedzina: $x \in \mathbb{R}$	dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
zbiór wartości: $y \in (-\infty, 0)$	zbiór wartości: $y \in (-\infty, 0)$
funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$	funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, p)$
funkcja jest malejąca w przedziale $\langle 0, \infty)$	funkcja jest malejąca w przedziale $\langle p, \infty)$

Własności funkcji f		Własności funkcji g	
funkcja przyjmuje wartość największą równą 0 dla $x = 0$		funkcja przyjmuje wartość największą równą 0 dla $x = p$	
Własności wykresu funkcji f		Własności wykresu funkcji g	
ramiona paraboli są skierowane do dołu		ramiona paraboli są skierowane do dołu	
oś symetrii: $x = 0$		oś symetrii: $x = p$	
wierzchołek: $(0, 0)$		wierzchołek: $(p, 0)$	

Wniosek:

Jeżeli w wyniku przekształcenia funkcji f określonej wzorem $f(x) = ax^2$ otrzymamy funkcję g określoną wzorem $g(x) = a(x - p)^2$, gdzie $a, p \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$, to dla funkcji g otrzymujemy:

- inne współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji,
- inną oś symetrii wykresu funkcji,
- inne przedziały monotoniczności funkcji,
- inny argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość najmniejszą lub największą.

W celu otrzymania wykresu funkcji kwadratowej g określonej wzorem $g(x) = a(x - p)^2$ z wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2$ wystarczy wykres funkcji f przesunąć o wektor o współrzędnych $[p, 0]$.

Przykład 1

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = 2(x + 4)^2$. Wyznamy:

- oś symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f ,
- przedziały monotoniczności funkcji f .

Rozwiązanie:

a) Ze wzoru funkcji f możemy odczytać, że $p = -4$, zatem osią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest prosta o równaniu $x = -4$.

b) Ponieważ $a = 2$, zatem ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji f , są skierowane do góry.

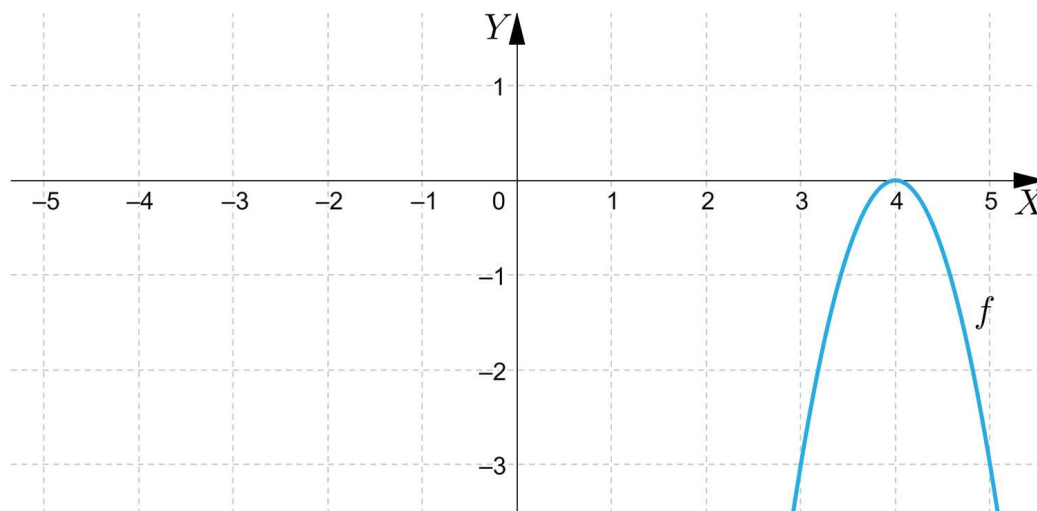
Zatem funkcja f jest:

- malejąca w przedziale $(-\infty, -4)$,
- rosnąca w przedziale $(-4, \infty)$.

Mając dany wykres funkcji kwadratowej, możemy wyznaczyć jej wzór.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = a(x - p)^2$. Wyznamy wzór tej funkcji.



Rozwiązanie:

Zauważmy, że prosta o równaniu $x = 4$ jest osią symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji f , zatem $p = 4$.

Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci $f(x) = a(x - 4)^2$.

Z wykresu funkcji f odczytujemy, że należy do niego punkt o współrzędnych $(3, -3)$.

Zatem do wyznaczenia wartości współczynnika a rozwiązujemy równanie:

$$-3 = a \cdot (3 - 4)^2, \text{ więc } a = -3.$$

Wzór funkcji f przedstawionej na rysunku jest postaci $f(x) = -3(x - 4)^2$.

Jeżeli mamy dane współrzędne punktu, który należy do wykresu funkcji kwadratowej oraz przedziały monotoniczności lub równanie osi symetrii jej wykresu, wówczas możemy wyznaczyć wzór tej funkcji.

Przykład 3

Do wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = a(x - p)^2$ należy punkt o współrzędnych $(1, -3)$. Wyznamy wzór tej funkcji, jeżeli wiemy, że funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -2, \infty \rangle$.

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -2, \infty \rangle$, zatem $p = -2$.

W związku z tym, wzór funkcji f zapisujemy w postaci $f(x) = a(x + 2)^2$.

Ponieważ punkt o współrzędnych $(1, -3)$ należy do wykresu funkcji f , zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$-3 = a \cdot (1 + 2)^2.$$

$$\text{Zatem } a = -\frac{1}{3}.$$

Wzór funkcji f zapisujemy w postaci $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 2)^2$.

Przykład 4

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$.

Wyznamy:

- równanie osi symetrii wykresu funkcji f ,
- współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji,
- przedziały monotoniczności funkcji f .

Rozwiązanie:

Zauważmy, że wzór funkcji f możemy zapisać w następującej postaci:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) = \frac{1}{2}(x - 3)^2.$$

- Ze wzoru funkcji f możemy odczytać, że $p = 3$, zatem osią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji jest prosta o równaniu $x = 3$.
- Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f ma współrzędne $(3, 0)$.
- Ponieważ $a = \frac{1}{2}$, zatem ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji f są skierowane do góry.

Funkcja f jest:

- malejąca w przedziale $(-\infty, 3)$,
- rosnąca w przedziale $\langle 3, \infty \rangle$.

Przykład 5

Wiadomo, że wykres funkcji kwadratowej g określonej wzorem $g(x) = f(x - 1)$ otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji kwadratowej f o wektor

$\vec{u} = [m^2 - m, 0]$, gdzie $m \in \mathbb{R}$. Wyznamy wartość parametru m .

Rozwiązanie:

Ponieważ $g(x) = f(x - 1)$, zatem wykres funkcji g otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $\vec{u} = [1, 0]$.

Dwa wektory są równe, jeżeli mają ten sam kierunek, zwrot i wartość zatem do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy równanie:

$$m^2 - m = 1$$

$$m^2 - m - 1 = 0$$

$$m_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$m_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Wobec tego $m \in \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Słownik

funkcja kwadratowa

funkcja określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

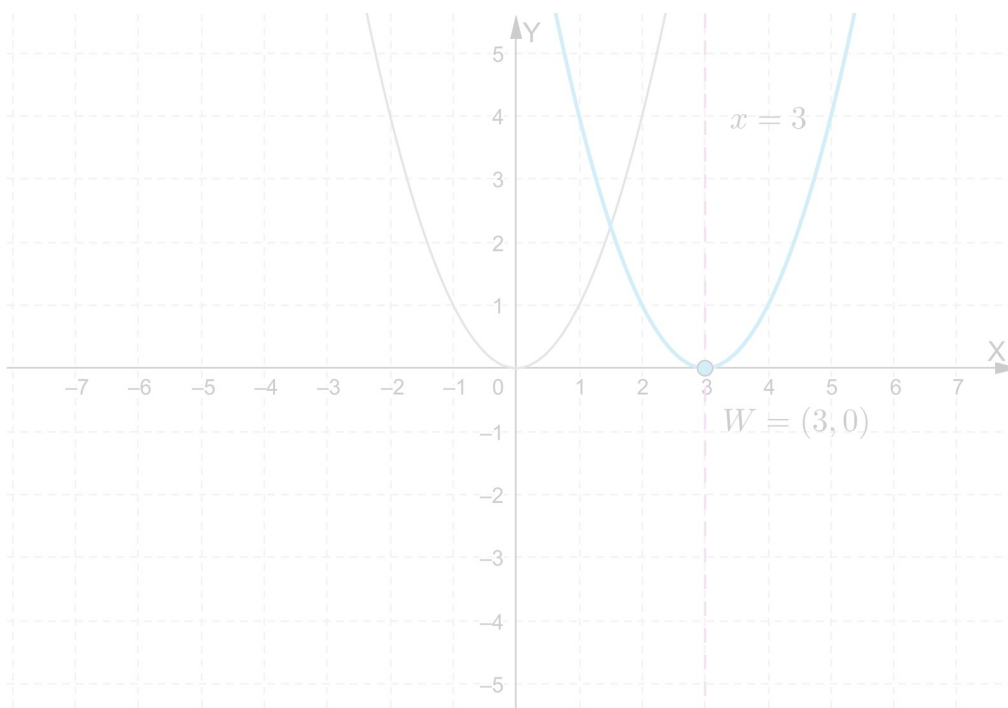
parabola

wykres funkcji kwadratowej

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z informacjami przedstawionymi w symulacji interaktywnej, a następnie wykonaj poniższe polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DXJIRQUNQ>

Polecenie 2

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f , współrzędne wierzchołka i równanie osi symetrii paraboli, będącej wykresem tej funkcji:

a) $f(x) = 3(x + 5)^2$

b) $f(x) = -2(x - 4)^2$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = 3(x - 1)^2$ jest prosta o równaniu:

☐ $x = 0$

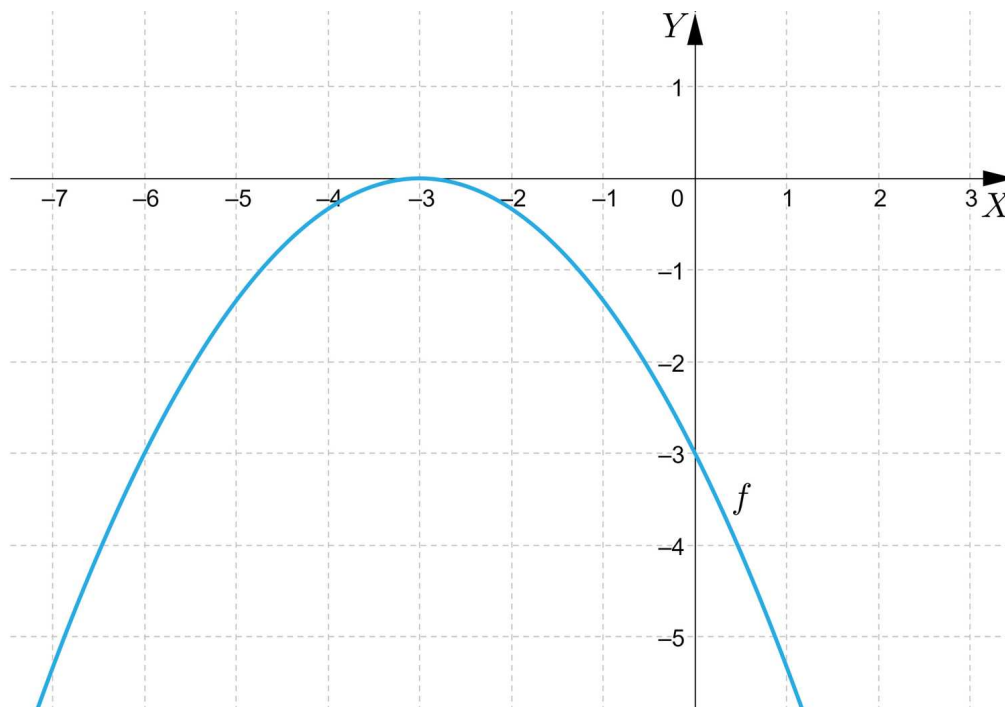
☐ $x = -1$

☐ $x = 1$

Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 3)^2$.



Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -3, \infty \rangle$.
- ☐ Funkcja f przyjmuje tylko wartości ujemne.
- ☐ Ośią symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji f jest prosta o równaniu $x = -3$.
- ☐ Wierzchołek paraboli, będącej wykresem funkcji f ma współrzędne $(0, -3)$.

Ćwiczenie 3



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Własności funkcji kwadratowej f określonej wzorem

$$f(x) = 3(x - 2)^2:$$

Funkcja f jest malejąca
w przedziale $(-\infty, 2]$.

Oś symetrii wykresu funkcji f
jest prosta o równaniu $x = -2$.

Własności funkcji kwadratowej f określonej wzorem

$$f(x) = -3(x + 2)^2:$$

Wierzchołek paraboli, która jest
wykresem funkcji f ma
współrzędne $(-2, 0)$.

Funkcja f jest rosnąca
w przedziale $(-\infty, 2]$.

Wierzchołek paraboli, która jest
wykresem funkcji f ma
współrzędne $(2, 0)$.

Oś symetrii wykresu funkcji f
jest prosta o równaniu $x = 2$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary wzór funkcji f z jedną własnością wykresu funkcji, określonej za pomocą tego wzoru.

$$f(x) = (x - 3)^2$$

funkcja f jest malejąca w przedziale
 $\langle -3, \infty)$

$$f(x) = (x + 3)^2$$

funkcja f jest malejąca w przedziale
 $(-\infty, 3]$

$$f(x) = -(x - 3)^2$$

funkcja f jest rosnąca w przedziale
 $(-\infty, 3]$

$$f(x) = -(x + 3)^2$$

funkcja f jest rosnąca w przedziale
 $\langle -3, \infty)$

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)^2$, to osią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji jest prosta o równaniu $x = \boxed{}$.

Jeżeli funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 2(x - 1)^2$, to wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji ma współrzędne $(\boxed{}, 0)$.

Jeżeli funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = (x - 2)^2$, to funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, \boxed{})$.

Ćwiczenie 7



Dana jest funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = -2(x + 2)^2$. Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

Ośią symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji jest prosta o równaniu $x = \boxed{}$.

Punkt o współrzędnych $(\boxed{}, \boxed{})$ jest wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem tej funkcji.

Do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych $(\boxed{}, -2)$.

Ćwiczenie 8



Do wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = a(x - p)^2$ należy punkt o współrzędnych $(3, 2)$, a prosta $x = 4$ jest osią symetrii wykresu tej funkcji.

Wyznacz:

a) wzór funkcji f ,

b) przedziały monotoniczności funkcji f .

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres i własności funkcji kwadratowej $y = a(x - p)^2$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa różnice pomiędzy wykresami funkcji zadanych wzorami $y = ax^2$ oraz $y = a(x - p)^2$,
- wyznacza wzór funkcji $y = a(x - p)^2$ na podstawie informacji o jej wykresie,
- wymienia własności funkcji określonej wzorem $y = a(x - p)^2$ na podstawie wzoru oraz wykresu,
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa;

- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Wykres i własności funkcji kwadratowej $y = a(x - p)^2$ ” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 4-osobowych grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się z materiałem w sekcji „Symulacja interaktywna”, a następnie wykonują zawarte w tej części polecenia.
3. W kolejnym kroku uczniowie rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Przesunięcie wykresu jednomianu kwadratowego wzdłuż osi układu współrzędnych](#)

Wskazówki metodyczne:

- „Symulację interaktywną” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy do omawianego tematu.
- „Symulację interaktywną” można zastosować do określania położenia paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej w prostokątnym układzie współrzędnych.