Utytułowane liczby

Utytułowane liczby

Źródło: Austris Augusts, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Prawie w każdym roku nauki poznajesz nowe liczby. Umiesz już operować liczbami wymiernymi i niewymiernymi, może nawet zdarzyło ci się zetknąć z liczbami zespolonymi.

Rok 1984
George Orwell
Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Liczby od wieków fascynowały nie tylko naukowców. Niektóre do dziś uważane są za magiczne, inne mają status wręcz kultowy, za sprawą swojej obecności w popkulturze, mitologii czy historii. Przykładem mogą być liczby: 13 (liczba pechowa), 45 (prędkość obrotów płyt winylowych zwanych singlami), 101 (numer pokoju strachu opisany w powieści G. Orwella *Rok 1984*), 666 (złowieszcza liczba, symbolizuje nadejście końca świata). Można tak wymieniać, prawie w nieskończoność.

Teraz poznasz niektóre „utytułowane” liczby, czyli takie, którym nadano nazwy pochodzące od nazwisk badających je matematyków. Treści tego materiału rozszerzają obowiązujący zakres podstawy programowej, zatem możesz potraktować je jako nieobowiązkowe, rozwijające twoje pasje matematyczne.

Twoje cele

- Wykorzystasz symbol Newtona, obliczając wartości „utytułowanych” liczb rzeczywistych.
- Utworzysz ciągi liczbowe, posługując się trójkątami liczbowymi.
- Poznasz sposoby szybkiej zamiany potęgi trójmianu na sumę.

Przeczytaj

Liczby Catalana

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1
\end{array}
$$

Rozpatrzmy środkowe liczby w trójkącie Pascala: $1, 2, 6, 20, 70, \ldots$

Zauważmy, że liczby te można podzielić odpowiednio przez: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ i otrzymać ciąg liczb naturalnych: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 123, 429, \ldots$

Tak utworzone liczby nazywamy liczbami Catalana, na cześć belgijskiego matematyka E. Catalana (1814 – 1894).

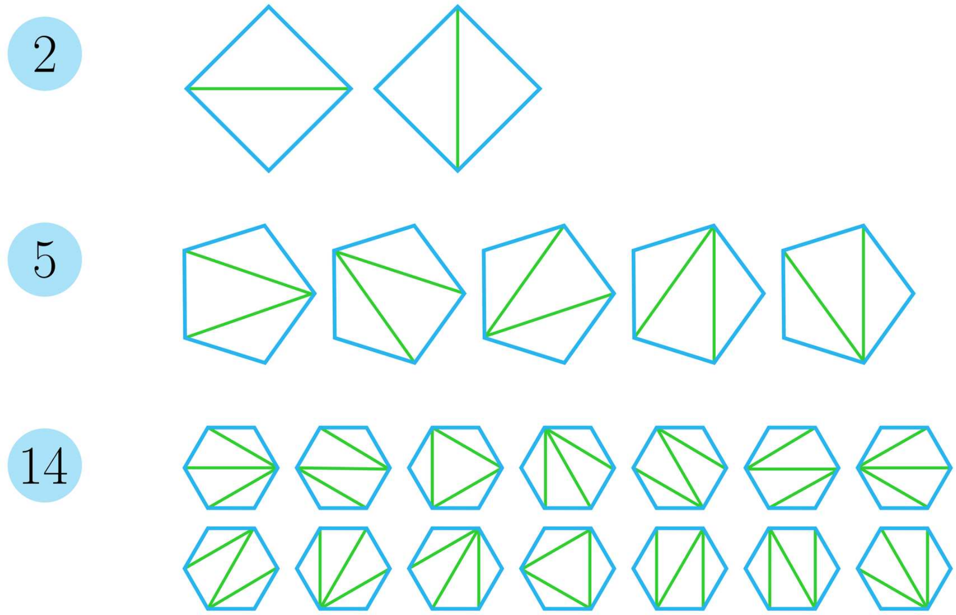
Każdy n–ty wyraz ciągu liczb Catalana określony jest wzorem:

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!} \text{ dla } n \geq 0$$

Liczby Catalana spełniają zależność:

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \text{ dla } n \geq 1$$

Liczby te mają wiele interpretacji kombinatorycznych. Na przykład liczba c_n wyraża liczbę sposobów podziału wielokąta wypukłego, mającego $n+2$ boków, na różne trójkąty przy pomocy przekątnych nieprzecinających się wewnątrz wielokąta.



Trójkąt Catalana to trójkąt liczbowy, w którym każdy element (oprócz pierwszego) jest równy sumie elementu stojącego powyżej oraz elementu stojącego po lewej stronie.

1						
1	1					
1	2	2				
1	3	5	5			
1	4	9	14	14		
1	5	14	28	42	42	
1	6	20	48	90	132	132

Suma liczb każdego wiersza jest równa ostatniej liczbie w następnym rzędzie i jest równa liczbie Catalana.

$$
\begin{array}{llllllll}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & 1+1=2 & & & & & \\
1 & 2 & 2 & & & & & \\
1 & 3 & 5 & 5 & 1+3+5+5=14 & & & \\
1 & 4 & 9 & 14 & 14 & & & \\
1 & 5 & 14 & 28 & 42 & 42 & 1+5+14+28+42+42=132 & \\
1 & 6 & 20 & 48 & 90 & 132 & 132 &
\end{array}
$$

> **Przykład 1**
>
> Znajdziemy ostatnią liczbę ósmego wiersza trójkąta Catalana.
>
> Obliczamy sumę liczb stojących w siódmym wierszu. Ich suma będzie szukaną liczbą.
>
> $1+6+20+48+90+132+132=429$
>
> **Odpowiedź:**
>
> Ostatnia liczba w ósmym wierszu trójkąta Catalana, to liczba Catalana 429.

Liczby Bella

Czy zdarzyło ci się zastanawiać, ile jest sposobów pogrupowania obiektów, jeśli są one rozróżnialne? Odpowiedź na to pytanie znalazł Eric Bell (1883 – 1960) – amerykański matematyk, autor powieści science–fiction.

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & 1 \\
0 & 1 & & & & & & 1 \\
0 & 1 & 1 & & & & & 2 \\
0 & 1 & 3 & 1 & & & & 5 \\
0 & 1 & 7 & 6 & 1 & & & 15 \\
0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & & 52 \\
0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & 203
\end{array}
$$

Liczba możliwych pogrupowań nazywa się liczbą Bella. Kolejne liczby Bella to: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, . . .

Liczba Bella określa na przykład:

- liczbę rozmieszczeń n różnych obiektów w co najwyżej n identycznych pudełkach,
- liczba usadzeń n osób dookoła co najwyżej n stolików (gdy nieważny jest sposób usadzenia osób przy stoliku),
- liczba różnych schematów rymowych w strofie n–wersowej.

Przykład 2

Pokażemy, jak utworzyć trójkąt Bella, w którym w lewej kolumnie znajdują się kolejne liczby Bella:

- Pierwsza liczba to 1.

- W każdym następnym wierszu pierwsza liczba jest równa ostatniej z poprzedniego wiersza.

- Pierwsza liczba w drugim wierszu to zatem 1.
- Następne liczby znajdujemy, dodając ostatnią liczbę do liczby stojącej nad nią. Zatem na drugim miejscu w wierszu drugim zapiszemy liczbę: $1 + 1 = 2$.
  1
  1 2

- Trzeci wiersz zaczynamy od ostatniej liczby z wiersza drugiego, czyli 2.
- Do liczby 2 dodajemy liczbę stojącą powyżej, czyli 1. Otrzymujemy: $2 + 1 = 3$.

- Do 3 dodajemy liczbę stojącą powyżej: $3+2=5$.
  1
  $1\ 2$
  $2\ 3\ 5$

- Pierwszą liczbą czwartego wiersza jest 5 (ostatnia liczba z wiersza 3). Następnie:
  $5+2=7$.
  I dalej: $7+3=10$. Ostatnia liczba to: $10+5=15$.

- Podobnie powstaje piąty wiersz i kolejne.
  1
  $1\ 2$
  $2\ 3\ 5$
  $5\ 7\ 10\ 15$
  $15\ 20\ 27\ 37\ 52$
  $\ldots$

Liczby Faulhabera

Znamy już wzór na sumę 0, wzór na sumę 1, wzór na sumę 2 i wzór na sumę 3 potęg kolejnych liczb naturalnych.

$$1^0+2^0+3^0+\ldots+n^0=n$$

$$1^1+2^1+3^1+\ldots+n^1=\tfrac{n^2+n}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\tfrac{1}{3}\cdot\left(n^3+\tfrac{3}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n\right)$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\tfrac{1}{4}\cdot\left(n^4+2n^3+n^2\right)$$

Niemiecki matematyk Johann Faulhaber (1580 – 1635), zwany przez współczesnych Wielkim Matematykiem z Ulm, podał wzór na sumę wyższych potęg kolejnych liczb naturalnych.

$$1^{k-1}+2^{k-1}+\ldots+n^{k-1}=$$

$$=\tfrac{1}{k}\cdot\left[n^k+\binom{k}{1}\cdot n^{k-1}\cdot\tfrac{1}{2}+\binom{k}{2}\cdot n^{k-1}\cdot\tfrac{1}{6}+\binom{k}{3}\cdot n^{k-3}\cdot 0+\ldots\right]$$

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym przypomina wzór dwumianowy Newtona. Brak tylko wyrazu wolnego, wyrazy mnożone są przez pewne stałe, zwane czasem liczbami Faulhabera.

$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, 0, -\dfrac{1}{30}, 0, \dfrac{1}{42}, 0, \ldots$

Przykład 3

Znajdziemy sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych, mniejszych od 101.

Oznaczmy: $S = 1^3 + 2^3 + \ldots + 100^3$.

Korzystamy ze wzoru: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot \left(n^4 + 2n^3 + n^2\right)$.

Stąd:

$$L = \frac{1}{4} \cdot \left(100^4 + 2 \cdot 100^3 + 100^2\right)$$

$$L = \frac{1}{4} \cdot (100000000 + 2000000 + 10000) = 25502500$$

Odpowiedź:

Suma sześcianów kolejnych liczb naturalnych mniejszych od 101 to 25502500.

Słownik

liczba Bella

dla liczby naturalnej n to liczba podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z podanymi w animacji przykładami trójkątów liczbowych. W każdym przypadku spróbuj odkryć algorytm tworzenia poszczególnych wierszy trójkąta.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Des1kvoXL

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej utytułowanych liczb.

Polecenie 2

Korzystając z trójkątnego trójkąta, zapisz w postaci sumy $\left(1+x+x^2\right)^3$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Informacje do ćwiczeń $1, 2, 3$.

Liczby leniwego dostawcy żywności to liczby, które opisują maksymalną liczbę części na które można podzielić naleśnik przy użyciu prostych cięć.

Stosując współczynniki dwumianowe, wzór na n–tą liczbę leniwego dostawcy można wyrazić wzorem:

$$p_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{2},$$

gdzie:
$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Ćwiczenie 1

Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.
Kolejne liczby leniwego dostawcy to:

- $1, 4, 10, 16, 19, 21, 28, \ldots$
- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, \ldots$
- $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, \ldots$
- $1, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

Ćwiczenie 2

Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.
Wzór na n-tą liczbę leniwego dostawcy można również wyrazić wzorem:

- $p_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$, gdzie $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $p_{n+1} = 1 \cdot \binom{n}{0} + 2 \cdot \binom{n}{1} + 3 \cdot \binom{n}{2}$, gdzie $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $p_{n+1} = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$, gdzie $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $p_{n+1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$, gdzie $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Ćwiczenie 3

Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.
Maksymalną liczbę p elementów, które można utworzyć przy danej liczbie n cięć, gdzie $n \geq 0$, można obliczyć ze wzoru:

- $p = \frac{n^2 + n + 1}{2}$
- $p = \frac{n^2 + n + 2}{2}$
- $p = \frac{n^2 - n + 2}{2}$
- $p = \frac{n^2 + n}{2}$

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Oceń, czy poniższe równości są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie równości prawdziwe.

- [ ] $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot (n^4 + 2n^3 + n^2).$
- [ ] $1^1 + 2^1 + 3^1 + \ldots + n^1 = \frac{1}{4} \cdot (n^2 + n).$
- [ ] $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot (2n^3 + 3n^2 + n).$

Ćwiczenie 6

Uzupełnij zapisy, przeciągając w odpowiednie miejsca sumy liczb stojących w kolejnych wierszach trójkątnego trójkąta Pascala.

Uzupełnij lukę we wniosku, wpisując poprawną liczbę.

Suma liczb w kolejnych wierszach trójkątnego trójkąta Pascala jest równa kolejnym potęgom liczby ______.

Ćwiczenie 7

Uzupełnij rozwinięcie potęgi trójmianu, przeciągając odpowiednie liczby w puste pola.

$(1 + x + x^2)^4 = 1 +$ ______ $\cdot x +$ ______ $\cdot x^2 +$ ______ $\cdot x^3 +$ ______ $\cdot x^4 +$ ______ $\cdot x^5 +$ ______ $\cdot x^6 +$ ______ $\cdot x^7 +$ ______ $\cdot x^8$

16 | 19 | 1 | 4 | 4 | 16 | 10 | 10

Ćwiczenie 8

Oblicz, ile jest sposobów podziału sześciokąta foremnego na trójkąty za pomocą nieprzecinających się przekątnych.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Utytułowane liczby

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{n-1}=n$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$;

3) korzysta ze wzorów na: a^3+b^3, $(a+b)^n$ i $(a-b)^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje symbol Newtona, obliczając wartości „utytułowanych” liczb rzeczywistych

- tworzy ciągi liczbowe, posługując się trójkątami liczbowymi
- wybiera najdogodniejszy dla siebie sposób szybkiej zamiany potęgi trójmianu na sumę
- dostrzega analogie i prowadzi proste rozumowania do ich zastosowania
- ocenia efekty własnej pracy i pracy grupy

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analogia
- mini konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel rozpoczyna zajęcia od przytoczenia kilku ciekawostek nawiązujących do historii odkrycia niektórych „utytułowanych” liczb, może też zaprezentować krótką prezentację przybliżającą te zagadnienia.
2. Następnie informuje uczniów o temacie i celu zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach przypominają wiadomości na temat trójkąta Pascala i zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj” oraz w sekcji „Animacja”.
   Ich zadaniem jest, posługując się analogią, ułożenie swojego trójkąta liczbowego, według wymyślonego przez siebie klucza.
   Grupy wymieniają się zadaniami – mają ustalić „klucz” tworzenia trójkąta, który otrzymali i znaleźć jak najwięcej jego własności.
   Po zakończeniu tej część zająć, grupy prezentują swoje dokonania. Grupy które utworzyły najciekawsze trójkąty liczbowe i te, które znalazły najwięcej własności trójkątów, zostają nagradzane, np. „plusami”.

2. Mini konkurs zadaniowy – uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne. Najszybsze pary otrzymują „plusy”.

Faza podsumowująca:

1. Dyskusja – w rozwiązaniu jakiego typu problemów (nie tylko matematycznych) można wykorzystać „utytułowane” liczby.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, wskazując na ważne elementy zajęć, komentuje też trudności i problemy, z którymi borykali się uczniowie rozwiązując zadania. Dokonuje samooceny i oceny koleżeńskiej pracy pozostałych uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem domowym uczniów jest przygotowanie co najmniej jednego przykładu „utytułowanych” liczb, o których nie było mowy w czasie lekcji.

Materiały pomocnicze:

Podzbiory zbioru skończonego (treść rozszerzona)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako wprowadzenie do kombinatoryki.