



Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego

Źródło: [StockSnap](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Granice funkcji w punkcie można zdefiniować na kilka sposobów. Temat ten poświęcimy definicji, która po raz pierwszy została sformułowana w XIX wieku przez francuskiego matematyka Augustina Louisa Cauchy'ego. W odróżnieniu od definicji podanej przez Heinricha Heinego opiera się ona na zwykłej arytmetyce liczb i nie wykorzystuje innych pojęć takich jak granica ciągu.

Twoje cele

- Poznasz definicję funkcji w punkcie według Cauchy'ego.
- Udowodnisz, korzystając z definicji Cauchy'ego, że dana liczba jest granicą funkcji w punkcie.
- Poznasz związek pomiędzy definicją Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie.

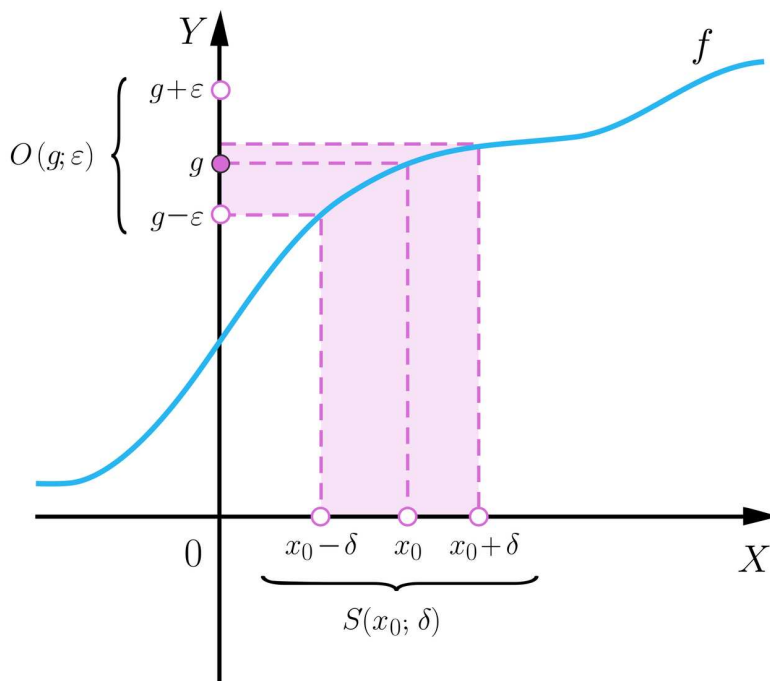
Definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie

Definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie jest definicją typowo arytmetyczną i wykorzystuje pojęcia **otoczenia** oraz **sąsiedztwa** punktu. Spójrzmy, jak ona brzmi.

Definicja: Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego

Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy granicą funkcji $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego argumentu funkcji f należącego do sąsiedztwa punktu x_0 o promieniu δ , wartość funkcji f w tym argumentie należy do otoczenia liczby g o promieniu ε .

Powyższą definicję można intuicyjnie rozumieć w następujący sposób: biorąc **otoczenie** $O(g, \varepsilon)$ liczby rzeczywistej g o dowolnym promieniu $\varepsilon > 0$ znajdziemy **sąsiedztwo** $S(x_0, \delta)$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że wartości funkcji w każdym argumentie należącym do znalezionej sąsiedztwa należeć będą do wziętego wcześniej otoczenia liczby g . Na poniższym rysunku przedstawiona została interpretacja geometryczna definicji granicy funkcji w punkcie według Cauchy'ego.



Jak korzystać z definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie?

Zaletą definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie jest fakt, że nie wykorzystuje ona innych pojęć matematycznych takich jak np. granica ciągu nieskończonego. Bazuje jedynie

na zwykłej arytmetyce. Wadą jest jednak to, że korzystając z definicji Cauchy'ego na ogół nie jesteśmy w stanie obliczyć granicy funkcji w zadanym punkcie. Definicja służy przede wszystkim do wykazywania, że dana z góry liczba rzeczywista jest granicą funkcji w zadanym punkcie. Poniższe przykłady pokazują w jaki sposób możemy tego dokonać.

Przykład 1

Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5.$$

Zgodnie z definicją Cauchy'ego bierzemy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Musimy wybrać liczbę rzeczywistą $\delta > 0$ tak, aby dla wszystkich argumentów funkcji $f(x) = 3x - 1$ spełniających nierówności $0 < |x - 2| < \delta$ prawdziwa była nierówność $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Spróbujmy przekształcić lewą stronę ostatniej nierówności podstawiając w miejsce $f(x)$ wzór naszej funkcji

$$|f(x) - 5| = |3x - 1 - 5| = |3x - 6| = 3|x - 2|.$$

Otrzymany wynik sugeruje aby przyjąć $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, gdyż wówczas dla każdego $x \in D_f$ takiego, że $0 < |x - 2| < \delta$ otrzymamy

$$|f(x) - 5| = 3|x - 2| < 3 \cdot \delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

co na mocy definicji Cauchy'ego dowodzi, że

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5.$$

Przykład 2

Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x) = -1.$$

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Dobierzemy liczbę $\delta > 0$ tak, aby dla wszystkich argumentów funkcji $f(x) = x^2 + 2x$ spełniających nierówności $0 < |x + 1| < \delta$ prawdziwa była nierówność $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$. Przekształćmy lewą stronę ostatniej nierówności.

$$|f(x) - (-1)| = |x^2 + 2x + 1| = |(x + 1)^2| = |x + 1|^2$$

Ponieważ wiemy, że $|x + 1| < \delta$ więc $|x + 1|^2 < \delta^2$. Jeśli zatem przyjmiemy $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, to otrzymamy

$$|f(x) - (-1)| = |x + 1|^2 < \delta^2 = (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

Z powyższego oraz z definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie wnioskujemy, że

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x) = -1.$$

Przykład 3

Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - 18x^2 + 54x) = 54.$$

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Dobierzemy liczbę $\delta > 0$ tak, aby dla wszystkich argumentów funkcji $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 54x$ spełniających nierówności $0 < |x - 3| < \delta$ prawdziwa była nierówność $|f(x) - 54| < \varepsilon$. Przekształćmy lewą stronę ostatniej nierówności.

$$|f(x) - 54| = |2x^3 - 18x^2 + 54x - 54| = |2(x - 3)^3| = 2|x - 3|^3$$

Ponieważ $|x - 3| < \delta$ więc $|x - 3|^3 < \delta^3$. Jeśli zatem przyjmiemy $\delta = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}$, to otrzymamy

$$|f(x) - 54| = 2|x - 3|^3 < 2\delta^3 = 2\left(\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^3 = \varepsilon.$$

Z powyższego oraz z definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - 18x^2 + 54x) = 54.$$

Przykład 4

Wykażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x) = 0.$$

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Dobierzemy liczbę $\delta > 0$ tak, aby dla wszystkich argumentów funkcji $f(x) = x^3 + x$ spełniających nierówności $0 < |x - 0| < \delta$ prawdziwa była nierówność $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Przekształćmy lewą stronę ostatniej nierówności.

$$|f(x) - 0| = |x(x^2 + 1)| = |x|(x^2 + 1)$$

Ponieważ $|x| < \delta$ więc podnosząc nierówność stronami do kwadratu oraz dodając stronami 1 otrzymamy $x^2 + 1 < \delta^2 + 1$. Stąd

$$|f(x) - 0| = |x|(x^2 + 1) < \delta(\delta^2 + 1).$$

Zauważmy, że do wybranej wcześniej utalonej liczby $\varepsilon > 0$ musimy dobrać liczbę $\delta > 0$, tak aby $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Chcemy zatem wybrać liczbę dodatnią δ tak aby spełniona była nierówność $\delta(\delta^2 + 1) < \varepsilon$. Wybierając liczbę dodatnią δ dostatecznie bliską zeru,

wyrażenie $\delta(\delta^2 + 1)$ także przyjmie wartość na tyle bliską zero aby spełniona była nierówność $\delta(\delta^2 + 1) < \varepsilon$. Stąd, dla tak dobranej liczby $\delta > 0$ z wcześniejszych obliczeń wynika, że dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że $0 < |x| < \delta$

$$|f(x) - 0| = |x|(x^2 + 1) < \delta(\delta^2 + 1) < \varepsilon.$$

Zatem udowodniliśmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x) = 0.$$

Związek definicji Cauchy'ego z definicją Heinego.

Okazuje się, że istnieje silny związek pomiędzy definicjami granicy funkcji w punkcie według Heinego oraz według Cauchy'ego. Mianowicie definicje te są równoważne. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: Związek pomiędzy definicją Cauchy'ego oraz Heinego granicy funkcji w punkcie

Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą funkcji $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ według Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona granicą funkcji $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ według Heinego.

Słownik

otoczenie punktu

Otoczeniem punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy zbiór

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

sąsiedztwo punktu

Sąsiedztwo punktu x_0 o promieniu $\delta > 0$ nazywamy zbiór

$$S(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

Infografika

Polecenie 1

Poniższa infografika pokazuje w jaki sposób można wykorzystać definicję Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie do wykazania, że dana liczba jest granicą funkcji wymiernej. Zapoznaj się z przedstawioną metodą a następnie wykonaj polecenia znajdujące się poniżej.

Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{3x - 6}.$$

Polecenie 2

W dowolny znany Ci sposób oblicz granicę funkcji f w punkcie $x_0 = 2$.

Polecenie 3

Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie, wykaż, że wyznaczona w poprzednim poleceniu liczba jest granicą funkcji f w punkcie $x_0 = 2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Wskaż co powinno być wpisane w wy kropkowane miejsce.

Korzystając z definicji Cauchy'ego, wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$. Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Niech $\delta = \dots$. Wówczas dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że $0 < |x - 1| < \delta$ mamy $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 3ε

☐ 2ε

☐ $\frac{\varepsilon}{3}$

☐ $\frac{\varepsilon}{2}$

Ćwiczenie 3



Przenieś w puste miejsca właściwe wyrażenia.

Korzystając z definicji Cauchy'ego, wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow 2} (3 - x) = 1$. Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Niech $\delta = \boxed{}$. Wówczas dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że $\boxed{}$ mamy

$|f(x) - 1| = \boxed{} = \varepsilon$

$-\varepsilon$

$|2 - x| < \delta$

$0 < |x - 2| < \delta$

ε

$|2 - x| < \delta$

Ćwiczenie 4



Przenieś w puste miejsca właściwe wyrażenia.

Korzystając z definicji Cauchy'ego, wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 1) = -8$. Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Niech $\delta =$. Wówczas dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że mamy

$$|f(x) - g| = |x^2 - 6x + 9| = \text{} < \text{}$$

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Przenieś w puste miejsca właściwe wyrażenia.

Korzystając z definicji Cauchy'ego wykażemy, że $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$. Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Niech $\delta =$. Wówczas dla wszystkich $x \in D_f$ takich, że mamy

$$|f(x) + 4| = \text{} < \text{}$$

Ćwiczenie 7



Korzystając z definicji Cauchy'ego, udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (4x^2 - 4x) = -1$.

Ćwiczenie 8



Korzystając z definicji Cauchy'ego, udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 + 6x^2 + 6x + 4) = 2$.

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna definicję Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie
- stosuje definicję granicy Cauchy'ego funkcji w punkcie do wykazywania, że dana liczba jest granicą funkcji w punkcie
- zna zależność pomiędzy definicjami Cauchy'ego i Heinego granicy funkcji w punkcie

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego”, a następnie określa cele i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
2. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego”).

Materiały pomocnicze:

- [Granice funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego”.