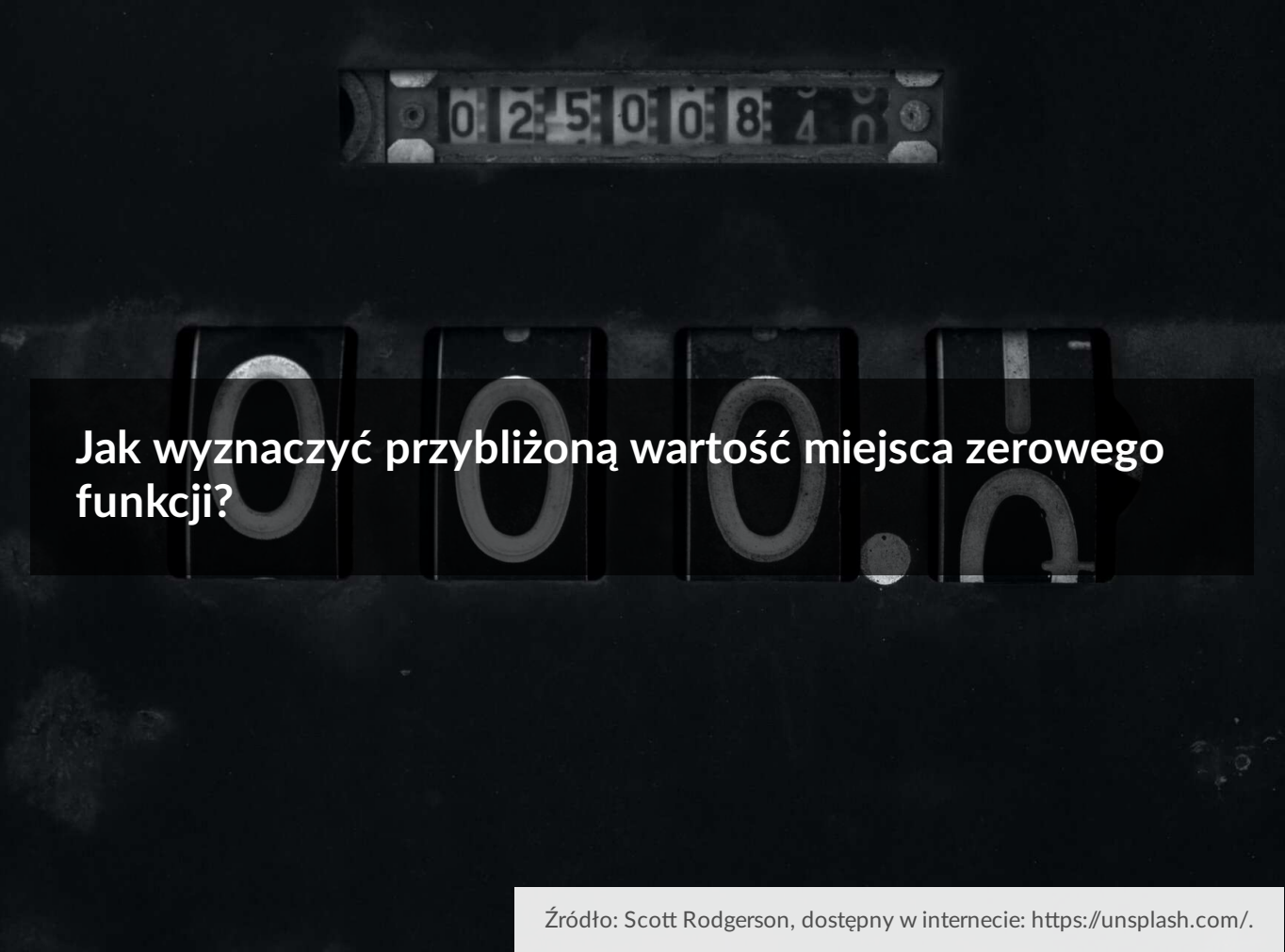




Jak wyznaczyć przybliżoną wartość miejsca zerowego funkcji?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak wyznaczyć przybliżoną wartość miejsca zerowego funkcji?

Źródło: Scott Rodgerson, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Na podstawie wykresów niektórych funkcji jesteśmy w stanie stwierdzić, że mają one miejsca zerowe, ale trudno je wyznaczyć algebraicznie. Również wiele stałych używanych w matematyce, jak chociażby π , jest niewymiernych, co znaczy, że co prawda są dobrze zdefiniowane, ale trudno podać ich dokładną wartość liczbową. W tym materiale poznasz metodę wyznaczania przybliżonej wartości miejsc zerowych pewnych funkcji oraz przybliżonej wartości różnych liczb.

Twoje cele

- Wyznaczysz przybliżone wartości miejsc zerowych niektórych funkcji.
- Wyznaczysz przybliżoną wartość pierwiastków niektórych liczb.
- Wyznaczysz przybliżoną wartość liczby π .

Przeczytaj

Pierwszym krokiem znajdowania przybliżonej wartości danej liczby jest zapisanie jej w takiej postaci, żeby występowała we wzorze jakiejś znanej, nieskomplikowanej funkcji.

Jeżeli, na przykład, będziemy próbować szacować wartość liczby π , możemy ją zapisać jako $f(\pi) = \sin \pi = 0$, używając funkcji $f(x) = \sin x$, a gdy chcemy wyznaczyć przybliżoną wartość pierwiastka z 3, to możemy podobnie zapisać go jako $g(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^2 - 3 = 0$. Dla wygody dalszego postępowania będziemy chcieli za każdym razem otrzymać równanie, w którym po prawej stronie będzie zero, więc w przypadku $\sqrt{3}$ musieliśmy użyć funkcji kwadratowej, przesuniętej w dół.

Naszym głównym narzędziem będzie twierdzenie Darboux.

Twierdzenie: Darboux

Niech f będzie funkcją ciągłą, określoną na domkniętym przedziale $\langle a; b \rangle$. Załóżmy, że $f(a) \neq f(b)$. Niech m będzie mniejszą z liczb $f(a)$ i $f(b)$, zaś M większą z nich. Dla każdej wartości h takiej, że $m < h < M$, istnieje argument c taki, że $a < c < b$ i $f(c) = h$.

Twierdzenie to mówi, że każda funkcja ciągła, określona na przedziale domkniętym, przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy wartościami na swoich brzegach, i taką cechę nazywamy **własnością Darboux**.

Dowiedzmy się teraz, jak go użyć do przybliżania wartości pewnych liczb.

Metoda bisekcji

Jak już ustaliliśmy wcześniej, będziemy próbować wyznaczać przybliżenie nieznanej liczby x_0 poprzez zapisanie jej w postaci $f(x_0) = 0$, gdzie f będzie pewną znaną funkcją ciągłą na przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$. Przedział musimy dobrać tak, aby wartości funkcji na jego brzegach miały różne znaki. Niestety, jeżeli są tych samych znaków, musimy poszukać innego przedziału – czasami warto narysować najpierw wykres funkcji f , żeby wyznaczyć potrzebny przedział. Załóżmy, że mamy taki przedział, w którym znaki wartości funkcji w punktach a i b są różne. Zdefiniujmy, jak w twierdzeniu Darboux, liczbę m jako mniejszą z wartości $f(a)$ i $f(b)$, a M jako większą z nich. Ponieważ wiemy, że znaki wartości $f(a)$ i $f(b)$ są różne, wiemy teraz, że m jest liczbą ujemną, a M liczbą dodatnią. Jeżeli jako wartość h przyjmimy zero, widzimy, że jest to na pewno wartość pomiędzy m i M , więc używając twierdzenia Darboux zdobywamy pewność, że istnieje argument c pomiędzy a i b taki, że $f(c) = 0$.

Pokazaliśmy, że na pewno istnieje rozwiązanie naszego równania $f(x) = 0$ pomiędzy a i b , teraz spróbujemy przybliżyć jego wartość.

Utworzymy ciąg (x_n) kolejnych przybliżeń wartości x_0 . Na początek przyjmijmy, że pierwszym naszym przybliżeniem będzie środek przedziału $\langle a; b \rangle$, czyli

$$x_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Jeżeli $f(x_1) = 0$, to znaczy, że znaleźliśmy dokładną wartość liczby x_0 i możemy zakończyć nasze poszukiwania.

Zazwyczaj jednak tak nie będzie i $f(x_1)$ będzie albo dodatnie, albo ujemne. Popatrzmy teraz na znaki wartości funkcji f na brzegach, jedna jest dodatnia, druga ujemna. Tym samym w każdej sytuacji albo wartość $f(a)$ jest takiego samego znaku, jak wartość $f(x_1)$, a wartość $f(b)$ jest innego znaku, albo na odwrót.

Możemy zatem zawęzić nasz obszar poszukiwań liczby x_0 do połowy poprzedniego przedziału, wybierając jedną z połówek: $a \leq x \leq x_1$ lub $x_1 \leq x \leq b$ tak, by znaki wartości funkcji na brzegach nowego, krótszego o połowę przedziału, były różne.

Oznaczmy odpowiednio brzegi nowego przedziału przez a_1 i b_1 , to znaczy

$$a_1 = \begin{cases} a & \text{jeżeli znaki wartości } f(a) \text{ i } f(x_1) \text{ są różne} \\ x_1 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz

$$b_1 = \begin{cases} x_1 & \text{jeżeli znaki wartości } f(a) \text{ i } f(x_1) \text{ są różne} \\ b & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Możemy teraz rozpatrzeć tę samą funkcję f , co wcześniej, ale na dwukrotnie węższym przedziale, $a_1 \leq x \leq b_1$.

Jesteśmy pewni, że znaki wartości funkcji na brzegach są różne, więc ponownie dzięki twierdzeniu Darboux możemy być pewni, że w tym przedziale zawiera się rozwiązanie równania $f(x) = 0$.

Wybermy następnie drugie przybliżenie naszej wartości, x_2 , ponownie jako środek przedziału $\langle a_1; b_1 \rangle$.

Tę procedurę możemy kontynuować, za każdym razem skracając dwukrotnie długość przeszukiwanego przedziału, tworząc ciąg przybliżeń $x_1, x_2, x_3, \dots$ oraz ciągi lewych i prawych krańców rozpatrywanych przedziałów, $a_1, a_2, a_3, \dots$ oraz $b_1, b_2, b_3, \dots$ odpowiednio.

W ten sposób poznaliśmy metodę bisekcji (czyli połowienia) poszukiwania kolejnych przybliżeń nieznanymi wartościami zerowymi funkcji.

Przykład 1

Użyjemy metody bisekcji do znalezienia przybliżenia liczby $\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

Zapiszmy tę wartość jako miejsce zerowe funkcji $f(x) = 3x - 1$.

Wyberzmy końce rozważanego przedziału: $a = 0$ i $b = 1$, i sprawdźmy założenia twierdzenia Darboux:

1. funkcja f jest ciągła na przedziale $\langle 0; 1 \rangle$;
2. wartości na końcach mają różne znaki: $f(a) = -1$, $f(b) = 2$.

Zatem pomiędzy 0 a 1 znajduje się poszukiwana wartość.

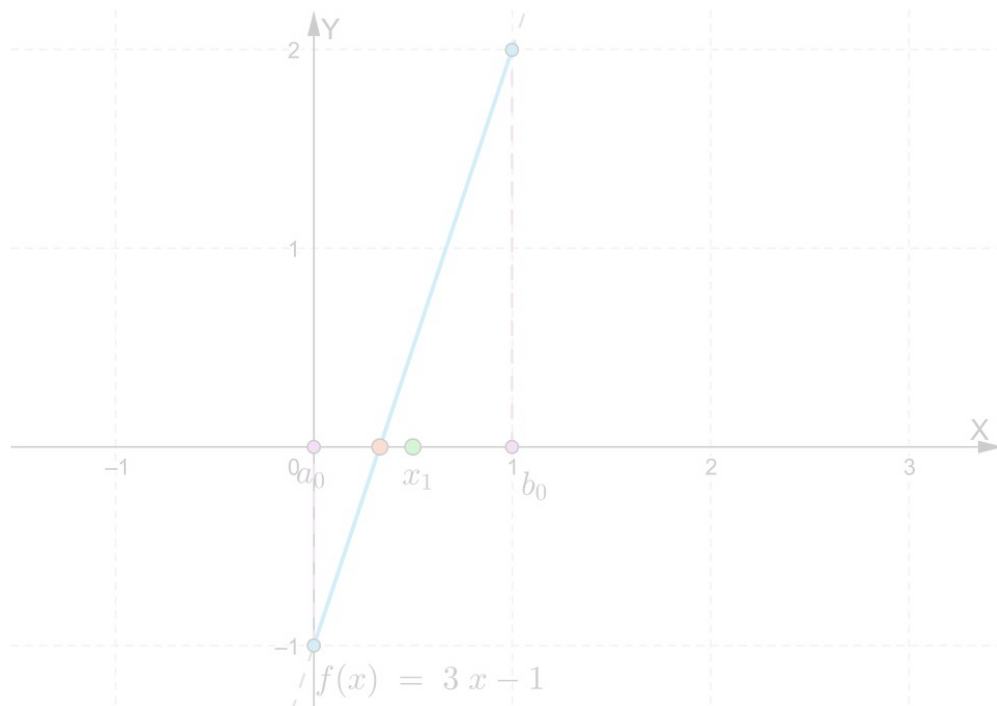
Pierwszym przybliżeniem będzie środek przedziału, $x_1 = 0,5$.

Zauważmy, że: $f(0,5) = 0,5$, więc $a_1 = a = 0$; $b_1 = x_1 = 0,5$ oraz $f(a_1) = -1$, $f(b_1) = 0,5$.

Drugim przybliżeniem będzie środek obecnie rozważanego przedziału, czyli $x_2 = 0,25$. Wartość funkcji f dla tego argumentu jest ujemna: $f(0,25) = -0,25$, więc $a_2 = x_2 = 0,25$ i $b_2 = b_1 = 0,5$. Sprawdźmy znaki na brzegu, $f(a_2) = -0,25$, $f(b_2) = 0,5$.

Trzecim przybliżeniem będzie środek aktualnie wybranego przedziału, czyli liczba $x_3 = \frac{0,25+0,5}{2} = 0,375$. Wartość funkcji f dla tego argumentu wynosi $f(0,375) = 0,125$, czyli jest dodatnia. Zatem $a_3 = a_2 = 0,25$ i $b_3 = x_3 = 0,375$.

Proces moglibyśmy kontynuować, ale już po dwóch krokach z wartości pierwszego przybliżenia, równego 0,5, wyznaczonego z błędem 0,16667, otrzymaliśmy wartość trzeciego przybliżenia równą 0,375, czyli wyznaczoną z czterokrotnie mniejszym błędem 0,04167. Im więcej wykonamy kroków, tym otrzymamy lepsze przybliżenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DvKoQexnm>

Proces ten możemy również obejrzeć, używając poniższego apletu.

Przykład 2

Użyjemy metody bisekcji do znalezienia przybliżeń wartości pierwiastka $\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Zdefiniujmy funkcję $f(x) = x^2 - 3$.

Funkcja ta jest funkcją ciągłą dla każdej liczby rzeczywistej.

Przyjmijmy, że $a = 0$ i $b = 2$. Zauważmy, że $f(a) = -3$ i $f(b) = 1$.

Obliczenia przedstawimy w skróconej postaci, za każdym razem sprawdzając, czy spełnione są założenia twierdzenia Darboux o różnych znakach wartości funkcji na krańcach nowych przedziałów.

Pierwsze przybliżenie: $x_1 = 1$, wartość funkcji $f(x_1) = -2$, wybieramy „prawą część przedziału pierwszego”.

Drugi przedział: $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ oraz $f(a_1) = -2$, $f(b_1) = 1$.

Drugie przybliżenie: $x_2 = 1,5$, wartość funkcji $f(x_2) = -0,75$, wybieramy „prawą część przedziału drugiego”.

Trzeci przedział: $a_2 = 1,5$, $b_2 = 2$ oraz $f(a_2) = -0,75$, $f(b_2) = 1$.

Trzecie przybliżenie: $x_3 = 1,75$.

Po trzech krokach otrzymaliśmy przybliżenie wartości pierwiastka z 3, $\sqrt{3} \approx 1,75$, które niewiele różni się od rzeczywistej wartości, $\sqrt{3} \approx 1,73205 \dots$

Przykład 3

Użyjemy metody bisekcji do wyznaczania ciągu przybliżeń wartości liczby π .

Rozwiązanie

Zdefiniujemy funkcję $f(x) = \sin x$ i przedział początkowy dla $a = 3$ i $b = 4$.

Funkcja $f(x) = \sin x$ jest ciągła w całej swojej dziedzinie.

Obliczenie ponownie przedstawimy w skróconej postaci, sprawdzając za każdym razem znaki wartości funkcji na krańcach otrzymanych przedziałów.

Pierwszy przedział: $a = 3$, $b = 4$ oraz $f(a) = 0,1411$, $f(b) = -0,7568$.

Pierwsze przybliżenie: $x_1 = 3,5$, wartość funkcji $f(x_1) = -0,3508$, wybieramy lewy przedział.

Drugi przedział: $a_1 = 3$, $b_1 = 3,5$, wartość funkcji $f(a_1) = 0,1411$, $f(b_1) = -0,3508$.

Drugie przybliżenie: $x_2 = 3,25$ oraz $f(x_2) = -0,1082$, wybieramy „lewy przedział”.

Trzeci przedział: $a_2 = 3$, $b_2 = 3,25$ oraz $f(a_2) = 0,1411$, $f(b_2) = -0,1082$.

Trzecie przybliżenie: $x_3 = 3,125$.

Po trzech krokach otrzymaliśmy przybliżenie liczby π postaci $\pi \approx 3,125$, które niewiele różni się od rzeczywistej wartości, $\pi = 3,1416, \dots$

Słownik

własność Darboux

funkcja posiada własność Darboux, jeżeli przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy wartościami na krańcach swojego przedziału określoności

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z metodą wyznaczenia przybliżenia liczby $\sqrt{2}$ przedstawioną na filmie samouczku.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DYwq6m1M3>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wyznaczania przybliżonej wartości miejsca zerowego.

Polecenie 2

Przedstaw 2 kolejne kroki metody bisekcji do wyznaczenia przybliżenia liczby $\sqrt{5}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż przedział, w którym można znaleźć miejsce zerowe funkcji $f(x) = 2x^2 + 1$.

☐ $a = 0$ i $b = 4$

☐ Funkcja nie posiada miejsca zerowego.

☐ $a = 0$ i $b = 1$

☐ $a = -1$ i $b = 0$

Ćwiczenie 2



Wskaż przedział, w którym można znaleźć miejsce zerowe funkcji $f(x) = 2x^2 - 1$.

☐ $a = 0$ i $b = 1$

☐ $a = -2$ i $b = -1$

☐ $a = 1$ i $b = 4$

☐ Funkcja nie posiada miejsca zerowego.

Ćwiczenie 3



Zakładając, że wartości ciągłej funkcji f w wybranych punktach wynoszą $f(0) = 2$, $f(1) = 1,5$, $f(2) = 0,125$, $f(3) = -0,5$ wskaż przedział, w którym z pewnością można znaleźć miejsce zerowe funkcji f .

☐ $a = 0$ i $b = 1$

☐ $a = 1$ i $b = 2$

☐ Funkcja nie posiada miejsca zerowego.

☐ $a = 2$ i $b = 3$

Ćwiczenie 4



Zakładając, że wartości ciągłej funkcji f w wybranych punktach wynoszą $f(0) = 2$, $f(1) = 1,5$, $f(2) = 0,125$, $f(3) = -0,5$ wskaż wartość pierwszego przybliżenia x_1 miejsca zerowego funkcji przy użyciu metody bisekcji.

☐ 2,5

☐ 2,1

☐ 2,75

☐ Funkcja nie posiada miejsca zerowego.

Ćwiczenie 5



Uzupełnij krańce przedziału tak, by był on najkrótszym przedziałem (z uwzględnieniem podanych propozycji), w którym istnieje miejsce zerowe funkcji f .

Funkcja $f(x) = 2x^3 + 3$ ma miejsce zerowe w przedziale: $\langle \text{ } ; \text{ } \rangle$.

Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie odpowiedzi pasujące do funkcji $f(x) = x^3 + 1$.

☐ Funkcja nie ma pierwiastków rzeczywistych.

☐ Funkcja nie jest ciągła.

☐ Funkcja ma pierwiastek równy $\sqrt[3]{2}$.

☐ Funkcja nie posiada pierwiastków dodatnich.

☐ Funkcja jest ciągła.

☐ Funkcja ma pierwiastek pomiędzy $a = -10$ i $b = 0$.

Ćwiczenie 7



Połącz w pary wzory funkcji i informacje o ich miejscach zerowych.

$$f(x) = 2x + 3$$

Funkcja nie ma rzeczywistych miejsc zerowych.

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x+2}$$

Funkcja ma miejsce zerowe pomiędzy $a = -1$ i $b = 1$.

$$f(x) = -2 - x^4$$

Funkcja ma miejsce zerowe pomiędzy $a = 1$ i $b = 3$.

$$f(x) = \frac{x-2}{2x}$$

Funkcja ma miejsce zerowe pomiędzy $a = -2$ i $b = -1$.

Ćwiczenie 8



Wyznacz w dwóch etapach wartość drugiego przybliżenia miejsca zerowego funkcji $f(x) = x^3 - 2$ przy użyciu metody bisekcji.

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak, Aneta Rogalska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak wyznaczyć przybliżoną wartość miejsca zerowego funkcji?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza przybliżone wartości miejsc zerowych niektórych funkcji;
- wyznacza przybliżoną wartość pierwiastków niektórych liczb;
- wyznacza przybliżoną wartość liczby π .

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego;
- dyskusja;

- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej sekcję „Wprowadzenie”, omawia z uczniami cele lekcji.
2. Nauczyciel ustala z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj” i próbują rozwiązać samodzielnie kolejne Przykłady, porównując swoje rozwiązania z materiałem.
2. Po zapoznaniu z tekstem, nauczyciel wyjaśnia powstałe wątpliwości na forum klasy.
3. Następnie – ponownie w parach – uczniowie, metodą kot i mysz, rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 – 7 w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.
4. Nauczyciel – dla utrwalenia wiadomości – wyświetla Film samouczek.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotne.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują ćwiczenie 8 z sekcji „Sprawdź się” oraz Polecenie 2.

Materiały pomocnicze:

- [Ciągłość funkcji w punkcie](#)
- [Jak zbadać ciągłość funkcji w punkcie?](#)

- [Wykres funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Film samouczek może zostać wykorzystany jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem lub jako uzupełnienie lekcji „Zastosowania twierdzenia Darboux”.