



Reguła mnożenia - jak wyznaczyć ilość liczb spełniających określone warunki?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Reguła mnożenia - jak wyznaczyć ilość liczb spełniających określone warunki?

Źródło: Ellen Qin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W trakcie tej lekcji pokażemy praktyczne zastosowania reguły mnożenia, budując modele kombinatoryczne opisane z użyciem ciągów.

Naszym celem będzie wykorzystanie reguły mnożenia do obliczenia, ile jest liczb spełniających określone warunki.

Przed rozwiązywaniem tych zadań warto przypomnieć sobie cechy podzielności liczb naturalnych przez 2, 5, 4, 25 i 125.

Twoje cele

- Wyznaczysz ilość liczb spełniających określone warunki.
- Obliczysz, ile jest sześciocyfrowych liczb naturalnych, których zapis spełnia podane warunki.
- Obliczysz, ile jest pięciocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez określoną cyfrę, w których dziesiętnym zapisie wszystkie cyfry są mniejsze od wskazanej.
- Podasz, ile jest ośmiocyfrowych liczb naturalnych, które spełniają podane warunki.
- Obliczysz, ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych większych od liczby wskazanej, w których wszystkie cyfry są parzyste.

Przeczytaj

Przykład 1

Obliczmy, ile jest sześciocyfrowych **liczb naturalnych**, których zapis dziesiętny spełnia jednocześnie dwa następujące warunki:

- na pierwszym i na drugim miejscu występują cyfry parzyste,
- na piątym i na szóstym miejscu występują cyfry podzielne przez 3.

Zauważmy, że liczbę sześciocyfrową

$$n = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10^1 + f \cdot 10^0$$

można utożsamić z sześćcioelementowym **ciągiem** (a, b, c, d, e, f) , gdzie współczynniki a, b, c, d, e, f to kolejne cyfry zapisu dziesiętnego liczby n .

Liczba sześciocyfrowa, która spełnia warunki zadania, ma następujące ograniczenia dla swoich cyfr:

- cyfra a jest różna od zera i parzysta, a więc $a \in \{2, 4, 6, 8\}$,
- cyfra b jest parzysta, zatem $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$,
- cyfry e i f są podzielne przez 3, skąd $e, f \in \{0, 3, 6, 9\}$,
- cyfry c oraz d mogą przyjmować dowolną z dziesięciu dostępnych wartości $c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Korzystając z **reguły mnożenia**, stwierdzamy, że dla takich a, b, c, d, e, f liczba sześciocyfrowych ciągów (a, b, c, d, e, f) jest równa $4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 4 = 32\,000$.

Wobec tego sześciocyfrowych **liczb naturalnych** spełniających warunki zadania jest również 32 000.

Przykład 2

Obliczmy, ile jest pięciocyfrowych **liczb naturalnych** podzielnych przez 25, w których zapisie dziesiętnym wszystkie cyfry są mniejsze od 7.

Rozumując podobnie jak w poprzednim przykładzie stwierdzamy, że każdej liczbie pięciocyfrowej

$$n = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0$$

można wzajemnie jednoznacznie przypisać pięcioelementowy **ciąg** (a, b, c, d, e, f) jej kolejnych cyfr.

Ponadto liczba naturalna jest podzielna przez 25, kiedy jej dwie ostatnie cyfry w zapisie dziesiętnym tworzą liczbę podzielną przez 25.

Zatem taka liczba pięciocyfrowa spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

oraz gdy ciąg (d, e) dwóch ostatnich cyfr jest jednym z następujących trzech:

$$(0, 0), (2, 5), (5, 0).$$

Na podstawie reguły mnożenia stwierdzamy, że odpowiadających jej ciągów pięciocyfrowych jest $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 = 882$. Oznacza to, że są 882 liczby spełniające warunki zadania.

Przykład 3

Obliczymy, ile jest wszystkich ośmiocyfrowych liczb naturalnych, które jednocześnie spełniają poniższe trzy warunki:

- cyfra jedności jest o 4 mniejsza od cyfry dziesiątek,
- cyfra setek jest o 3 większa od cyfry tysięcy,
- cyfry dziesiątek tysięcy i setek tysięcy są równe.

Każdej liczbie ośmiocyfrowej

$$n = a \cdot 10^7 + b \cdot 10^6 + c \cdot 10^5 + d \cdot 10^4 + e \cdot 10^3 + f \cdot 10^2 + g \cdot 10^1 + h \cdot 10^0$$

można wzajemnie jednoznacznie przypisać ośmioelementowy ciąg (a, b, c, d, e, f, g, h) jej kolejnych cyfr.

Z treści zadania wynika, że: $c = d, e = f - 3, g = h + 4$.

Zatem taka liczba ośmiocyfrowa spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ oraz } d = c,$$

$$e \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ oraz } f = e + 3,$$

$$h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ oraz } g = h + 4.$$

Zauważmy, że:

- dla każdej z możliwych wartości c istnieje dokładnie jedna odpowiadająca jej wartość d ,
- dla każdej z możliwych wartości e istnieje dokładnie jedna odpowiadająca jej wartość f ,
- dla każdej z możliwych wartości h istnieje dokładnie jedna odpowiadająca jej wartość g .

Na podstawie **reguły mnożenia** stwierdzamy, że takich liczb ośmiocyfrowych jest $9 \cdot 10 \cdot (10 \cdot 1) \cdot (7 \cdot 1) \cdot (6 \cdot 1) = 37\,800$.

Przykład 4

Obliczymy, ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych większych od 2403, których wszystkie cyfry są parzyste.

Każdej liczbie czterocyfrowej: $n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$ można wzajemnie jednoznacznie przypisać czteroelementowy ciąg (a, b, c, d) jej kolejnych cyfr.

Z warunków zadania wynika, że $a \geq 2$.

Rozpatrzmy dwa rozłączne przypadki:

1. $a = 2$,

2. $a > 2$.

Ad 1 W przypadku pierwszym mamy kolejne rozłączne przypadki:

Ad 1.1 $b = 4$ i $c = 0$; wtedy $d \in \{4, 6, 8\}$,

Ad 1.2 $b = 4$ i $c \in \{2, 4, 6, 8\}$; wtedy $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$,

Ad 1.3 $b \in \{6, 8\}$; wtedy $c, d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Ad 2 Natomiast w przypadku drugim liczby a, b, c, d spełniają warunki:

$$a \in \{4, 6, 8\},$$

$$b, c, d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Korzystając z **reguły mnożenia**, obliczamy, ile jest ciągów (a, b, c, d) spełniających warunki zadania w każdym z powyższych przypadków:

Ad 1.1 $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$,

Ad 1.2 $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = 20$,

Ad 1.3 $1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$,

Ad 2 $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 375$.

Korzystając z **reguły dodawania**, obliczamy, ile jest wszystkich liczb spełniających warunki zadania:

$$3 + 20 + 50 + 375 = 448.$$

Słownik

ciąg

funkcja, której dziedziną jest zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych lub pewien jego podzbiór, a wartościami są liczby rzeczywiste

liczba naturalna

dodatnia liczba całkowita

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$

reguła dodawania

jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania, w którym pokazane jest, jak wyznaczyć ilość liczb podzielnych przez 8, których cyfry podlegają pewnym ograniczeniom.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DqFhjcu38>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej reguły mnożenia.

Polecenie 2

Korzystając z omówionego przykładu, rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Rozpatrzmy wszystkie dziewięciocyfrowe liczby naturalne, które są podzielne przez osiem i w których zapisie dziesiętnym jest jedna cyfra 8, jedna cyfra 4, dwie cyfry 6, a pozostałe cyfry to jedynki. Obliczmy, ile jest wśród nich takich liczb, które wśród ostatnich trzech cyfr mają co najmniej jedną szóstkę.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz, ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 5, w których zapisie dziesiętnym wyłącznie dwie pierwsze cyfry są parzyste. Liczbę tę wpisz w okienko poniżej.

Ćwiczenie 2



Oblicz, ile jest wszystkich czterocyfrowych liczb naturalnych większych od 3000, których każda cyfra jest podzielna przez 3.

☐ 128

☐ 54

☐ 81

☐ 191

Ćwiczenie 3



Oblicz, ile jest sześciocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 125, w których zapisie dziesiętnym cztery ostatnie cyfry są nieparzyste. Liczbę tę wpisz w okienko poniżej.

Ćwiczenie 4



Oblicz, ile jest sześciocyfrowych parzystych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym cyfra dziesiątek jest o 3 mniejsza od cyfry setek.

☐ 315000

☐ 35000

☐ 31500

☐ 350000

Ćwiczenie 5



Rozpatrujemy wszystkie czterocyfrowe liczby naturalne. Wśród nich:

☐ jest dokładnie 4050 liczb, których cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

☐ jest dokładnie 100 liczb, których cyfry tysięcy, setek i dziesiątek są równe.

☐ jest dokładnie 90 liczb, których cyfry setek, dziesiątek i jedności są równe.

☐ jest dokładnie 800 liczb, których cyfra tysięcy jest mniejsza od cyfry jedności.

Ćwiczenie 6



Rozpatrujemy zbiór wszystkich liczb naturalnych dziesięciocyfrowych, które można zapisać przy użyciu cyfr 1, 2, 3. Są w nim następujące podzbiory:

A - liczb parzystych, których każde dwie sąsiednie cyfry różnią się o 1,

B - liczb parzystych, których każda z sześciu początkowych cyfr to trójka,

C - tych liczb, których tylko cztery ostatnie cyfry są nieparzyste.

Połącz w pary podane niżej liczby.

$|B|$

27

$|C|$

16

$|A|$

32

Ćwiczenie 7



Rozpatrujemy zbiór wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, które można zapisać wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wyróżniamy następujące podzbiory:

A - liczb parzystych, których suma pierwszej i ostatniej cyfry zapisu dziesiętnego jest równa 5.

B - liczb nieparzystych, których suma drugiej i piątej cyfry zapisu dziesiętnego jest równa 2.

C - liczb parzystych, których suma trzeciej i czwartej cyfry zapisu dziesiętnego jest równa 11.

D - liczb nieparzystych, których suma dwóch ostatnich cyfr zapisu dziesiętnego jest równa 7.

Uporządkuj rosnąco podane niżej liczby.

$|C|$



$|A|$



$|D|$



$|B|$



Ćwiczenie 8



Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne siedmiocyfrowe, które można zapisać przy użyciu cyfr 1, 2, 3, 4, 5. Jest wśród nich:

☐

tyle samo liczb podzielnych przez 2 co liczb, które są podzielne przez 4 lub są podzielne przez 5

☐

tyle samo liczb podzielnych przez 4 co liczb podzielnych przez 5.

☐

dwa razy więcej liczb podzielnych przez 2 niż liczb podzielnych przez 5

☐

trzy razy więcej liczb podzielnych przez 2 niż liczb podzielnych przez 4

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Reguła mnożenia - jak wyznaczyć ilość liczb spełniających określone warunki?

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
 - 2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
 - a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
 - b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.
- Zakres rozszerzony 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznaczy ilość liczb spełniających określone warunki;
- obliczy, ile jest sześciocyfrowych liczb naturalnych, których zapis spełnia podane warunki;

- obliczy, ile jest pięciocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez określoną cyfrę, w których dziesiętnym zapisie wszystkie cyfry są mniejsze od wskazanej;
- poda, ile jest ośmiocyfrowych liczb naturalnych, które spełniają podane warunki;
- obliczy, ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych większych od liczby wskazanej, w których wszystkie cyfry są parzyste.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja za i przeciw;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Reguła mnożenia – jak wyznaczyć ilość liczb spełniających określone warunki?” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 – „Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania, w którym pokazane jest, jak wyznaczyć ilość liczb podzielnych przez 8, których cyfry podlegają pewnym

ograniczeniom.” z sekcji „Animacja”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.

2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Reguła mnożenia – jak wyznaczyć ilość liczb spełniających określone warunki?”).

Materiały pomocnicze:

- [Reguła mnożenia, reguła dodawania](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Reguła mnożenia – jak wyznaczyć ilość liczb spełniających określone warunki?”.